Foglio del 27/4/2015

Es. (5) (a) $X = \mathbb{N}$, $n R m$ se $|n| = |m|$

- riflessiva ✓
- simmetrica ✓
- transitiva ✓

(b) $X = \mathbb{N}$, $n R m$ se $|n| \geq |m|$

- riflessiva ✓ ($|n| \geq |n|$)
- simmetrica NO ($|1| \geq |0|$, ma $|0| \not\geq |1|$)
- antisimmetrica ✓ ($|n| \geq |m|$ e $|m| \geq |n| \Rightarrow |n| = |m|$ e quindi $n = m$ perché $n, m \in \mathbb{N}$)

<u>NOTA</u> se avessimo preso $X = \mathbb{Z}$ non sarebbe stata antisimmetrica ($|-1| \leq |1|$, $|1| \leq |1|$ ma $1 \neq -1$)

(c) $X = \mathbb{N}$, $n R m$ se $|n| < |m|$

- riflessiva NO ($|n| \not< |n|$)
- simmetrica NO
- antisimmetrica NO (in realtà non può mai succedere in $\mathbb{N}$ che $|n| < |m|$ e $|m| < |n|$).
- transitiva ✓

(d) $a R b$ se "a è discendente di b"

- riflessiva ✓ (diciamo che "ognuno è discendente di se stesso")
- antisimmetrica ✓ (io sono l'unica persona che è mio discendente e mio ascendente)
- simmetrica ✗
- transitiva ✓

6 La bigezione $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^2$ induce una mappa
$\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
Lo 0 di $\mathbb{R}^4$ corrisponde allo 0 di $\mathbb{C}^2$.

$\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} /_{\sim} =$ $\qquad v \sim w$ se $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$: $v = \lambda w$

$= \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} /_{\simeq}$ $\qquad v \simeq w$ se $\exists\, \lambda \in \mathbb{R}$: $v = \lambda w$

(la stessa relazione, pensando i vettori come elementi di $\mathbb{C}^2$)

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} /_{\approxeq}$ $\qquad v \approxeq w$ se $\exists\, \lambda \in \mathbb{C}$: $v = \lambda w$

Ogni classe di equivalenza di $\approxeq$ è unione di classi di equivalenza di $\simeq$.
Quindi ogni classe di equivalenza di $\simeq$ è contenuta in un'<u>unica</u> classe di equivalenza di $\approxeq$.
(ovvero $v \simeq w \Rightarrow v \approxeq w$)
Quindi la mappa $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$
data da:
$$[v]_{\simeq} \longmapsto [v]_{\approxeq}$$
è ben definita ogni elemento di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, cioè, tramite la bigezione $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^2$, ogni classe di equiv. $[v]_{\simeq}$, nell'<u>unica</u> classe $[v]_{\approxeq}$ che la contiene.

7 $\quad \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathbb{R}/_\sim \qquad x \sim y$ se $x - y \in \mathbb{Z}$

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ha come insieme di rappresentanti i vettori

$$\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}}_{= \ell} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- $\mathbb{R}/_\sim$ ha come insieme di rappresentanti

$$[0, 1)$$

Definisco la mappa $\varphi : \mathbb{R} \to (0,1)$

$$x \xmapsto{\varphi} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

che è una <u>bigezione</u> e dunque

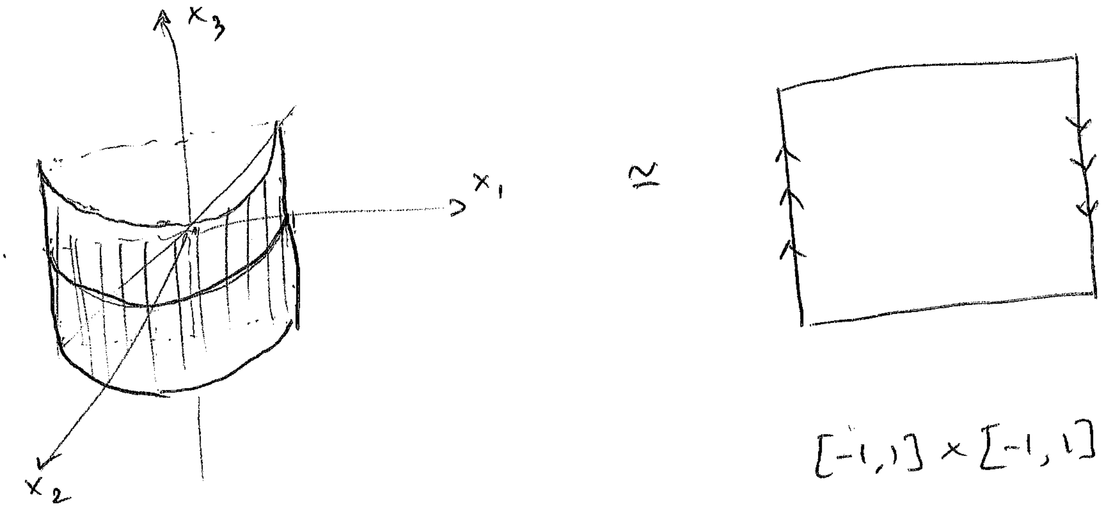
$f : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}/_\sim$ definita da

$$\begin{cases} f\left(\left[\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}\right]\right) = [\varphi(x)] \\ f\left(\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]\right) = [0] \end{cases}$$

è una bigezione.

8

$$Q = \{ x \in \mathbb{R}^3 ,\ x_1^2 + x_2^2 = 1 ,\ x_2 \geq 0,\ |x_3| \leq 1 \}$$



$[-1,1] \times [-1,1]$

9