

Geometria 7/5/15

Classificare quadratiche non degeneri

$$\mathcal{L} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : {}^t \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} Q & \vdots \\ \vdots & \cdot \end{pmatrix} \text{ simmetrica } \det(A) \neq 0$$

Visto: esiste una trasf. affine che trasforma $\mathcal{L}$ in uno dei 6 modelli; quale dipende da:

- segni autoval Q e A (o meno di cambio simultaneo di tutti)
- ci sono delle compatibilità (in particolare: Q ha al massimo un autoval. nullo) -

Come trovare il modello: $d_j = \det A_j$

$$A = \left(\underbrace{A_{0i}}_j \middle| \right) \}_{i=1}^n$$

Fatto 1 : se $d_2 \neq 0$ usando d_1, d_2, d_3, d_4
si trova il modello - CASO TIPICO

Fatto 2 : se $d_2 = 0$ anche dopo qualsiasi
permutazione delle coordinate, anche - CASO
ECCEZIONALE
(NON CAPITA)

Caso $d_2 \neq 0$ -

$$d_2 > 0$$

$\Rightarrow$ gli autoval di A_2 sono concordati;
 Suppongo $++$ (se no cambio segno).
 (basta guardare $d_1 = a_{11} \neq 0$) -

$$d_3 > 0$$

$$Q: +++$$

|

$$d_3 < 0$$

$$Q: ++-$$

|

$$d_3 = 0$$

$$Q: ++0$$

↓

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \ 1 \\ & & 1 \ 0 \end{pmatrix}$$

$$z = x^2 + y^2$$

Parab. ellittico

$$\begin{array}{cc}
 \swarrow & \searrow \\
 d_4 > 0 & d_4 < 0 \\
 A: + + + + & A: + + + - \\
 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \\
 x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0 & x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\
 \emptyset & \text{ellipsoide}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 \swarrow & \searrow \\
 d_4 > 0 & d_4 < 0 \\
 A: + + - - & A: + + - + \\
 \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \\
 x^2 + y^2 = 1 + z^2 & x^2 + y^2 + 1 = z^2 \\
 \text{iperboloid} & \text{iperb. 2 f.}
 \end{array}$$

$$d_2 < 0$$

Autov. $A_2: + -$

$$d_3 > 0$$

$$Q: + - -$$

$$d_n > 0$$

$$A: + - - +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$d_n < 0$$

$$+ - - -$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$d_3 < 0$$

$$Q: + - +$$

$$d_3 = 0$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{z} = x^2 - y^2$$

parab.
ipربولico

$$x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$$

$$X^2 + Y^2 = 1 + Z^2$$

iperb. 1 folde

$$x^2 - y^2 - z^2 - 1 = 0$$

$$X^2 + Y^2 + 1 = Z^2$$

iperb. 2 folde

$$d_h > 0$$

$$A: t - + -$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$X^2 + Y^2 = 1 + Z^2$$

iperb. 1 folde

$$d_h < 0$$

$$A: t - + +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 - y^2 + z^2 + 1 = 0$$

$$X^2 + Y^2 + 1 = Z^2$$

iperb. 2 folde

CONSIGLIO: NON imparare a memoria i casi,
ma ricordare che $d_j = \det(A_j)$ è il
prodotto degli autovalori di A_j ; quindi
usare $\text{sgn}(d_j)$ $j=1,2,3,4$ per trovare
segni autovalori di Q e A .

Resta caso $d_2 = 0$ anche dopo permutazione
delle coordinate.

$$\underline{\mathcal{E}_S}: \quad x^2 + y^2 - 7z^2 - 2xy - 8xz + 10yz + 4x - 6y + 24z + 19 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 & | & 2 \\ -1 & 1 & 5 & | & -3 \\ -4 & 5 & -7 & | & 12 \\ \hline 2 & -3 & 12 & | & 19 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = 0$$

Però l'equazione è anche:

$$x^2 - 7z^2 + y^2 - 8xz - 2xy + 10yz + 4x + 24z - 6y + 19 = 0$$

$$\begin{array}{c}
 x \quad z \quad y \quad 1 \\
 \begin{array}{c}
 x \\
 z \\
 y \\
 1
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 1 & -4 & -1 & | & 2 \\
 -4 & -7 & 5 & | & 12 \\
 -1 & 5 & 1 & | & -3 \\
 \hline
 2 & 12 & -3 & | & 19
 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

$$d_2 \neq 0$$

In practice: come d_2 si può usare uno qualsiasi di questi tre:

$$\begin{pmatrix}
 \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 \boxed{\cdot} & \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \boxed{\cdot} & \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot
 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \boxed{\begin{matrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{matrix}} & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{pmatrix}$$

Se uno di essi è $\neq 0$ uso il metodo precedente
(attenzione: quando $d_2 > 0$ per vedere se gli
autovalori sono $++$ o $--$ guardo un elemento
nelle diag. del blocco che ho usato per d_2 ; cioè:

$$\begin{pmatrix} -11 & & \\ & \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$d_2 > 0$$

ho autovalori $++$

$$(7 > 0, 9 > 0)$$

il -11 non dice
nulla su A_2

Resta il caso $d_2 = 0$ dopo possibili permutazioni -

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad ac = b^2$$
$$\Rightarrow ac \geq 0 \quad \text{e} \quad b = \pm \sqrt{ac}$$

Se $d_2 = 0$ per ogni permutazione ho:

$$Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \varepsilon_1 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} & \varepsilon_2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_3} \\ \varepsilon_1 \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} & \alpha_2 & \varepsilon_3 \sqrt{\alpha_2 \alpha_3} \\ \varepsilon_2 \sqrt{\alpha_1 \alpha_3} & \varepsilon_3 \sqrt{\alpha_2 \alpha_3} & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_j \in \{+1, -1\}$$

Nota che se uno degli α_j è nullo

$$(\alpha_1 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\det = 0} \\ 0 & \end{pmatrix})$$

$\Rightarrow \text{rank} \leq 1$: impossibile)

NO: dunque $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sono non nulli e concordi;
Suppongo che siano $+++$.

$$\det Q = \text{conto con Sarrus} = 2\alpha_1\alpha_2\alpha_3(\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 - 1).$$

Due possibilità:

1. $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = -1 \Rightarrow d_3 < 0$

$\Rightarrow Q$ ha autov.

$++-$

$---$ impossibile

avrei Q def. negativa
e invece ho $d_2 = 0$

$\Rightarrow$ usando seppio di d_4 conduto

$$2. \quad \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = +1$$

Cio' è impossibile perché
altrimenti avremmo $\text{rank } Q \leq 1$.

Infatti:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1 \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} & \sqrt{\alpha_1 \alpha_3} \\ \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} & \alpha_2 & \sqrt{\alpha_2 \alpha_3} \\ \sqrt{\alpha_1 \alpha_3} & \sqrt{\alpha_2 \alpha_3} & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \parallel & \parallel & \parallel \\ I & \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}} \cdot I & \frac{\sqrt{\alpha_3}}{\sqrt{\alpha_1}} \cdot I \end{matrix}$$

$$\varepsilon_1 = +1 \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -1 \Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} & -\sqrt{\alpha_1 \alpha_3} \\ \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} & \alpha_2 & -\sqrt{\alpha_2 \alpha_3} \\ -\sqrt{\alpha_1 \alpha_3} & -\sqrt{\alpha_2 \alpha_3} & \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$\parallel$ $\parallel$ $\parallel$
 I $\frac{\sqrt{\alpha_2}}{\sqrt{\alpha_1}} \cdot I$ $-\frac{\sqrt{\alpha_3}}{\sqrt{\alpha_1}} \cdot I$

(altri due casi simili) -

Conclusione: se tutti i d_2 dopo
permutez. sono nulli

• sulle diag di Q ho concordi
 $\Rightarrow$ segno $+++$ se no
cambio segno

• allora $d_3 < 0 \Rightarrow Q: ++-$

• allora $\text{sgn}(d_4)$ ci fa concludere

$$d_4 > 0$$

$$d_4 < 0$$

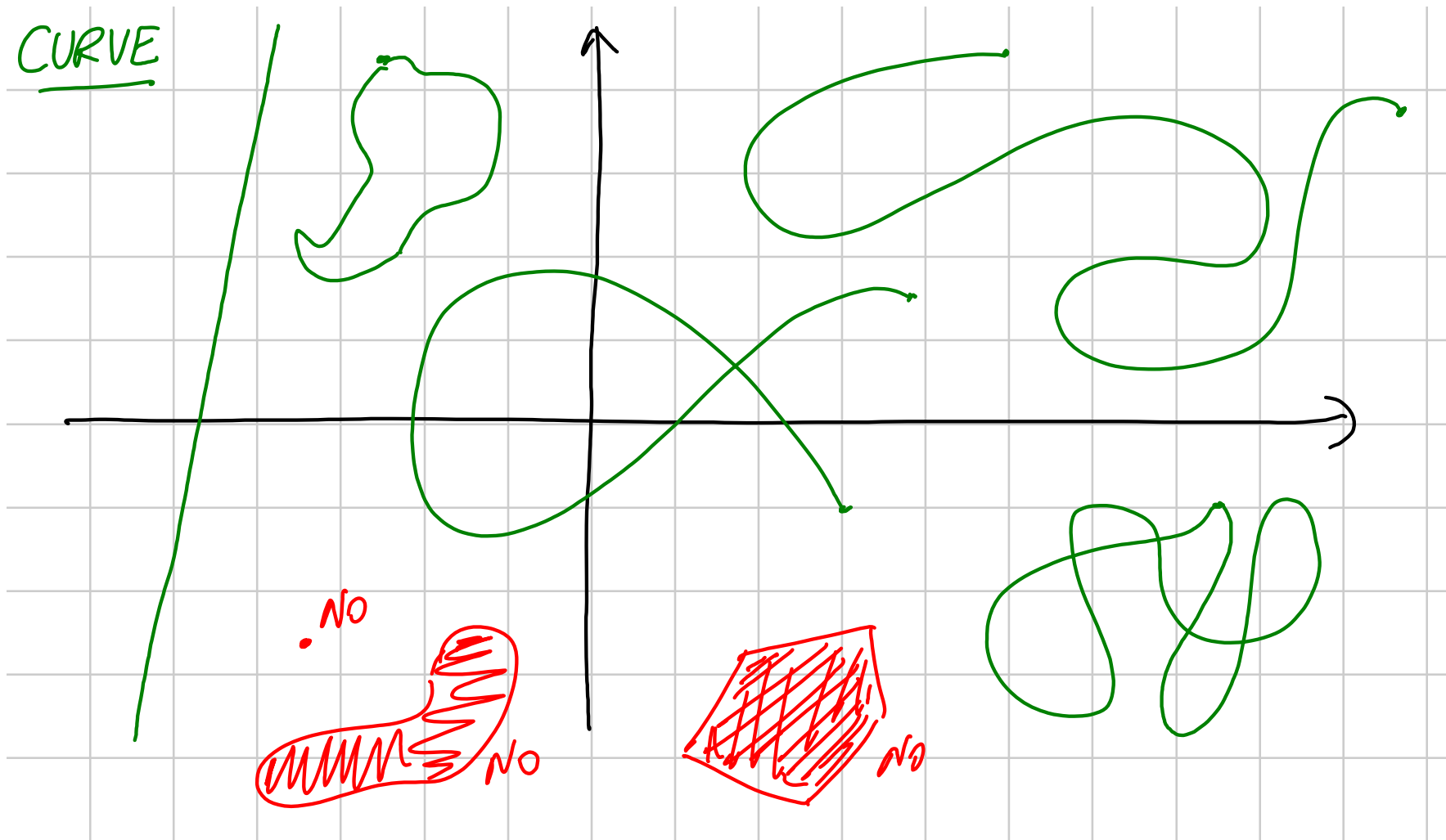
$A: +- -$ ipub. 1 folde

$A: +- +$ ipub 2 folde

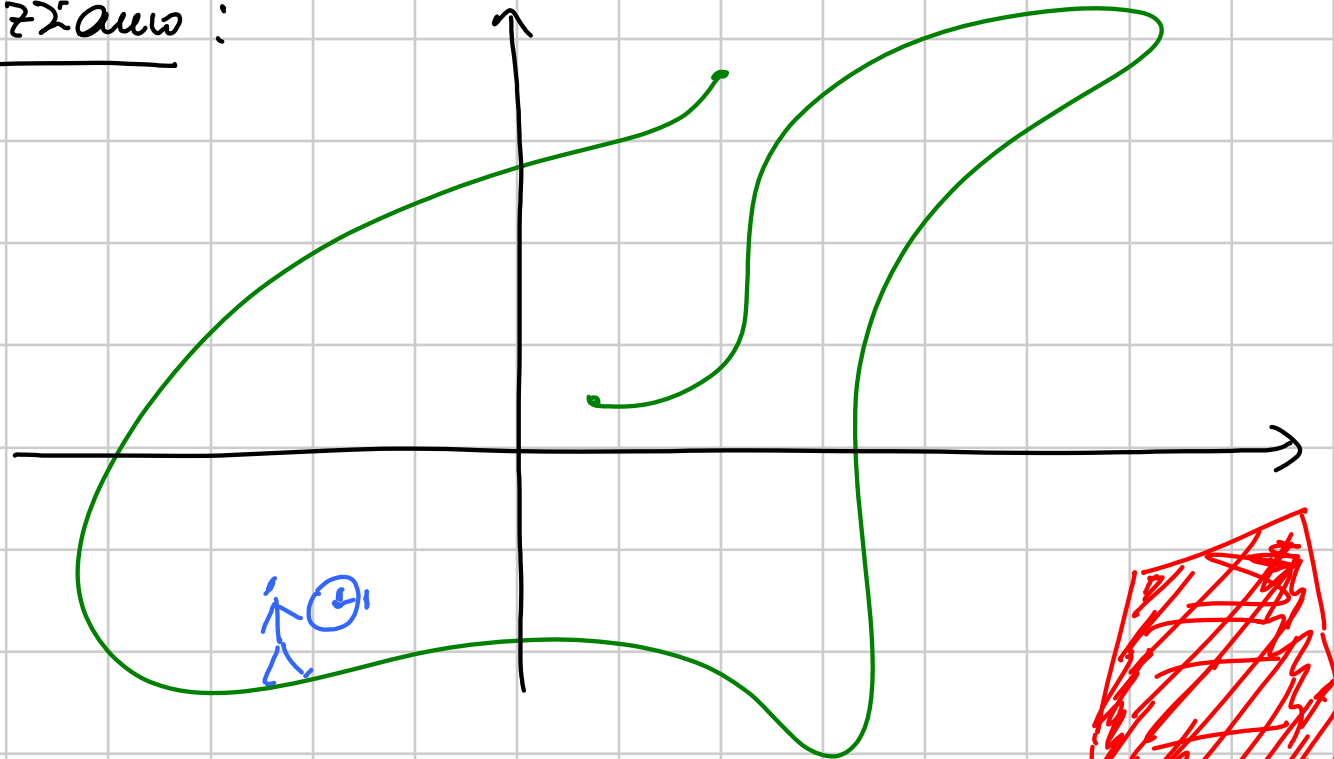
CURVE (nel piano e nello spazio 3-dim o n-dim)

Curva : oggetto unidimensionale (ma non una retta) in $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^n$) :

CURVE



Fondamenta:



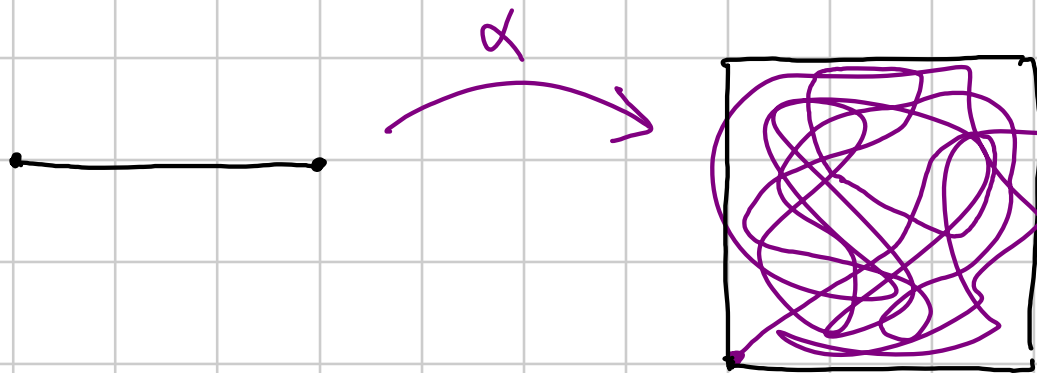
Curva: legge α che dà la posizione
dell'oggetto al variare del tempo.

Def: una curva parametrizzata è una
funzione $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$

Cosa chiediamo ad α ?

- α continua = l'ovino non fa salti -

Attenzione: esistono funzioni continue
e supetive $[0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$:



è possibile
riempire il
quadrato -

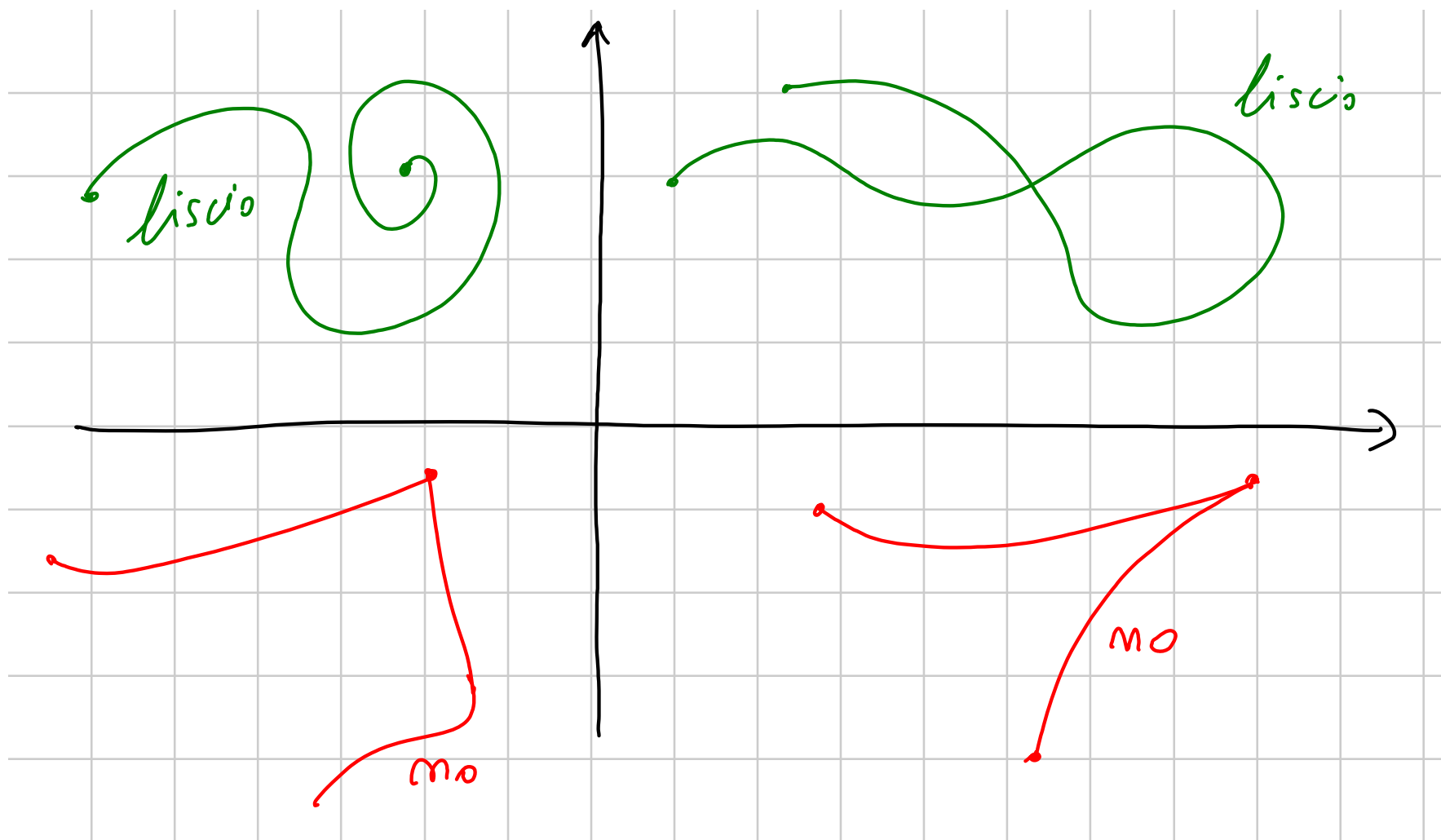
(DIFFICILE) -

Rimedio:

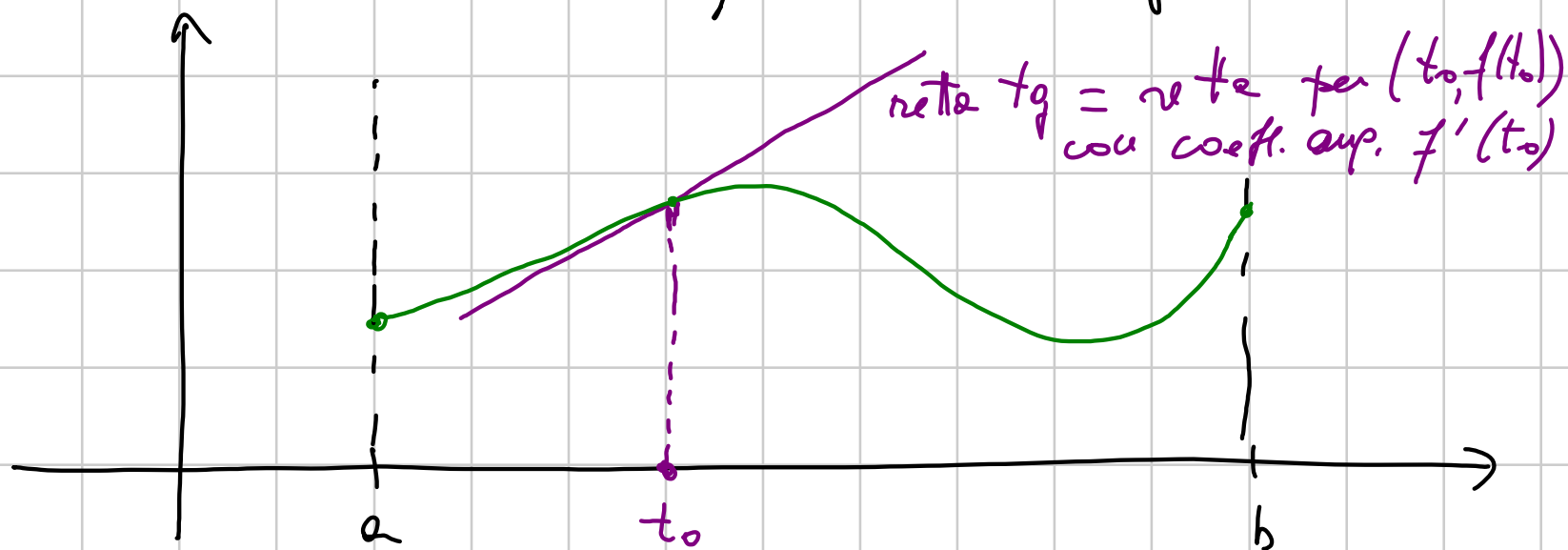
Def: chiamiamo curve regolari parametrizzate

una $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ che sia
continua e derivabile (cioè le m
componenti di α sono tutte continue e
derivabili) con $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a,b]$.

Fatto: ciò traduce sia l'idea che
l'immagine di α sia multidimensionale,
sia il fatto che essa sia liscia
(cioè che ammetta ovunque rette tangenti):



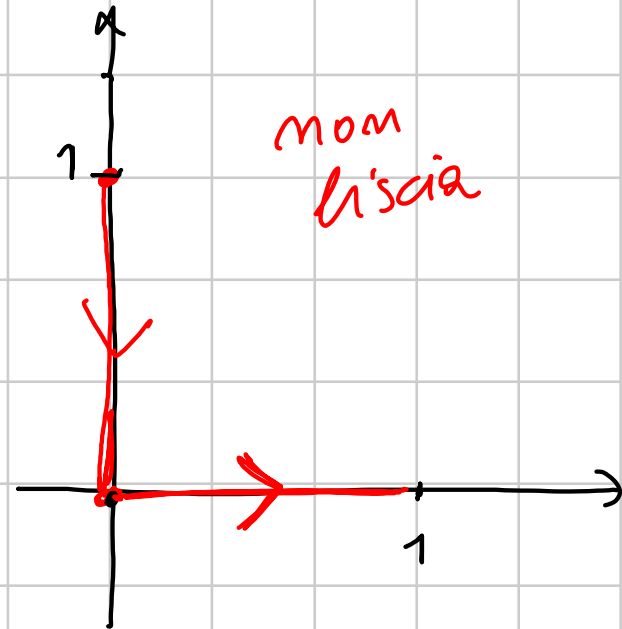
Nota: per una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$
basta avere che f è derivabile per
concludere che il grafico di f è liscio
cioè che ovunque retta tangente:



Qss: per $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ NON basta chiedere che α sia derivabile per avere che è liscia.

Es: $\alpha: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0, t^{1000}) & t \leq 0 \\ (t^{1000}, 0) & t \geq 0 \end{cases}$$



È chiaro che α ammette derivate di qualsiasi ordine su $[-1,0]$ e su $[0,1]$ (le curve sono polinomi).

Per vedere se esiste una derivata k -esima basta vedere se la sin. e la cos. e le derivate si ricordano:

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (0, 1000 \cdot t^{999}) & t \leq 0 \\ (1000 \cdot t^{999}, 0) & t \geq 0 \end{cases}$$

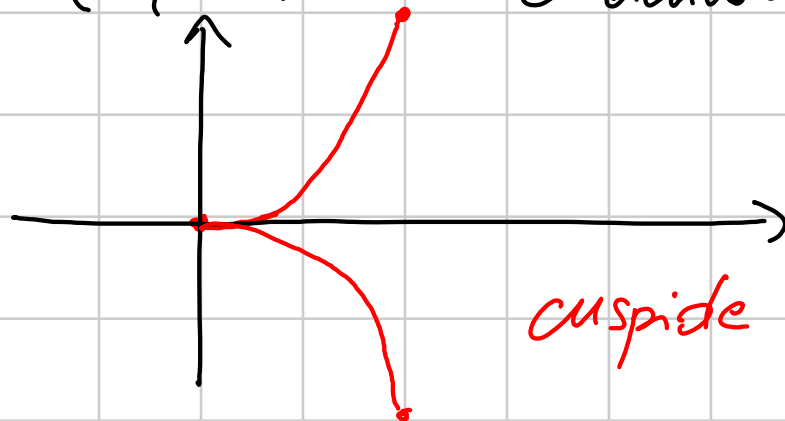
$\Rightarrow$ ok ; analog. esistono le prime 999
derivate (ma le 1000-esime no)

(Si possono fare esempi in cui esistono tutte
le derivate ma la curva fa un angolo -)

$$\mathcal{C}_S: \alpha(t) = (t^2, t^3)$$

$-_{\text{su } [-1,1]}$

$\mathcal{C}'$ derivabile infinite volte; ma



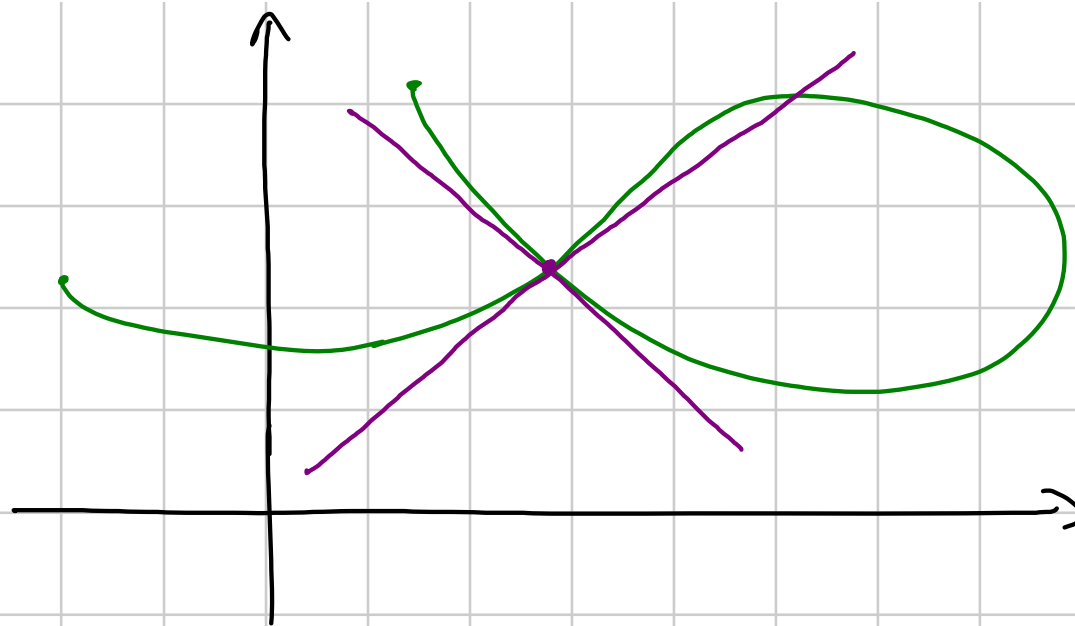
(e infatti $\alpha'(0) = (0,0)$: dunque α non è regolare).

Fondizziamo la retta tangente ("liscia");

Prop: sia $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^m$ curva regolare
iniettiva; sia $t_0 \in [a,b]$; allora la
retta passante per $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$ tende
per $t_1, t_2 \rightarrow t_0$ alla retta
 $\alpha(t_0) + \text{Span}(\alpha'(t_0))$;

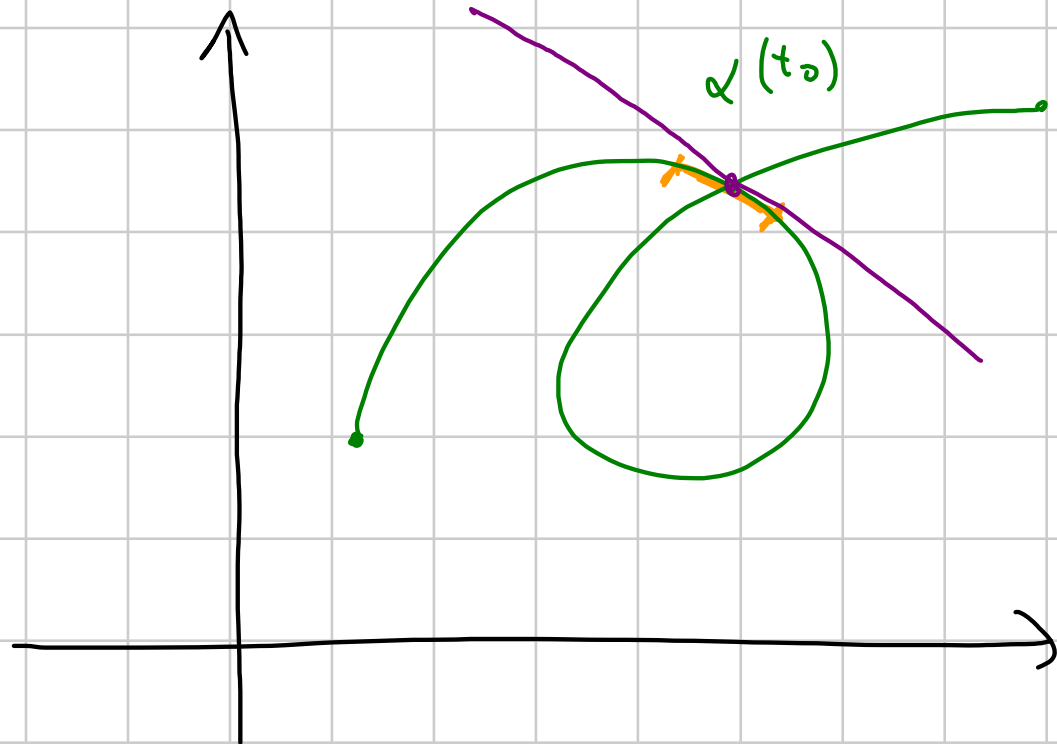
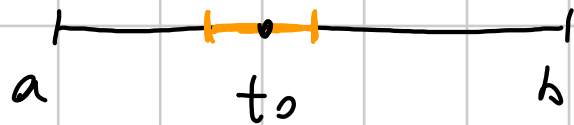
inoltre tale π_0 è l'unica retta
avente **duplice contatto** con l'immagine
di α in $\alpha(t_0)$.

Oss: chiedo iniziative anche nei punti di
autointersezione di T_{α} se ne ho
più di una:



Pos: se α non è iniettiva basta prendere un
 piccolo $\varepsilon > 0$ t.c. α sia iniettiva su $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$

per individuare una delle tangenti :



Una retta π avrà contatto con l'immagine di α di un certo ordine se:

$$d(t) = \text{distanza tra } \alpha(t) \text{ e } \pi$$

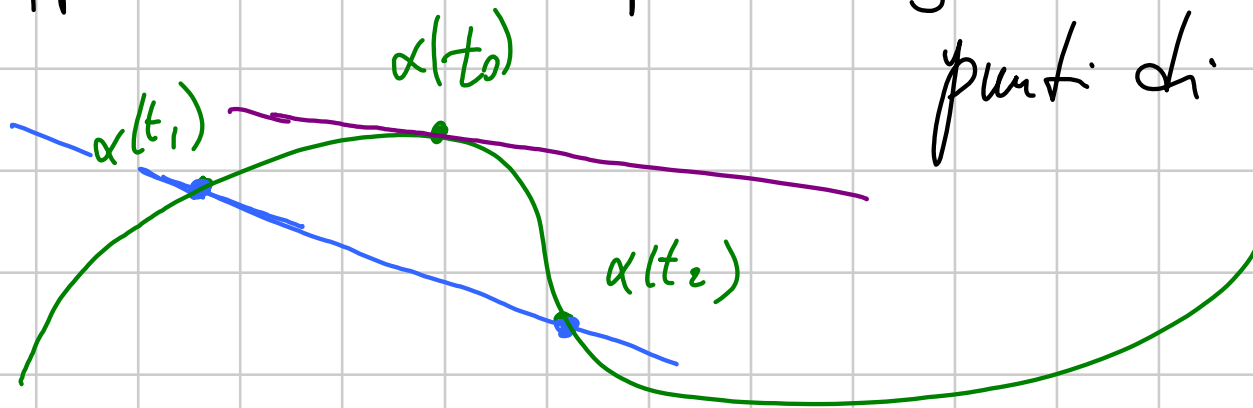
contatto semplice: $d(t_0) = 0$ (si toccano)

contatto duplice: $d(t_0) = 0$ e $d'(t_0) = 0$

Oss: posso applicarlo anche a un luogo α diverso da una retta; inoltre:

contatto triplice: $d(t_0) = d'(t_0) = d''(t_0) = 0$ _

Oppure: contatto duplice = fusione di due punti di contatto



Dim: Retta passante per $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$ ha
giacitura

$$\alpha(t_2) - \alpha(t_1) \quad \text{ovvero}$$

$$\frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{t_2 - t_1}$$

ed è facile vedere che per $t_1, t_2 \rightarrow t_0$
esso tende a $\alpha'(t_0)$ -

(Caso facile: se fisso $t_1 = t_0$ e prendo $t_2 = t$
che tende a t_0 ho

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha(t) - \alpha(t_0)}{t - t_0} = \alpha'(t_0)$$

Ora (nel caso $n=2$) posso che se una
 retta qualsiasi $\pi: ax + by + c = 0$
 ha duplice contatto con α in $\alpha(t_0)$
 allora π è la retta tangente.
 Posso supporre $a^2 + b^2 = 1$ quindi se $\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$$\text{ho } d(t) = d(x(t), r) = |ax(t) + by(t) + c| -$$

Contatto semplice : $d(t_0) = 0$: per ogni a, b
ho un singolo c che vale.

Contatto doppio : $d'(t_0) = 0$ -

$$d(t) = \sqrt{(ax(t) + by(t) + c)^2}$$

$$\Rightarrow d'(t) = \frac{1}{2} \frac{2(aX(t) + bY(t) + c)}{\sqrt{(aX(t) + bY(t) + c)^2}} \cdot (aX'(t) + bY'(t))$$

$$\frac{aX(t) + bY(t) + c}{|aX(t) + bY(t) + c|}$$

$$\parallel$$

$$\pm 1$$

dunque posso avere $d'(t) \rightarrow 0$ per $t \rightarrow t_0$
sì se

$$aX'(t_0) + bY'(t_0) = 0$$

ovvero se $\alpha'(t_0) = \begin{pmatrix} X'(t_0) \\ Y'(t_0) \end{pmatrix}$

soddisfa $ax + by = 0$, cioè se π

ha giacitura $\alpha'(t_0)$ 