Geometria 5/3/15

Determinante di Vandermonde.

$\forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ $(\mathbb{R}$ o $\mathbb{C})$

$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{n \times n} = \underbrace{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)}_{1}$$

prodotto di tutte le differenze $a_j - a_i$ al variare di i, j in $\{1, \dots, m\}$ con $i < j$.

$m = 2$ $\quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_2 - a_1$ ✓

$m = 3$ $\quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix} \overset{?}{=} (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$

$$a_2 a_3^2 + a_3 a_1^2 + a_1 a_2^2 - a_2 a_1^2 - a_3 a_2^2 - a_1 a_3^2$$

$$\parallel$$

$$(a_2 - a_1)(a_3^2 - a_1 a_3 - a_2 a_3 + a_1 a_2)$$

$$= a_2 a_3^2 - \cancel{a_1 a_2 a_3} - a_3 a_2^2 + a_1 a_2^2 - a_1 a_3^2 + a_3 a_1^2 + \cancel{a_1 a_2 a_3} - a_2 a_1^2$$

OK

In generale. I SOLUZ: per induz. su n.

$n = 2, 3$ ok. Passo induttivo $n-1 \longrightarrow n$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & & & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix} = \dots$$

A partire dall'ultima riga sostituisco lei con sé stessa meno a_1 volte la riga precedente (risalendo fino alla seconda riga):

$$\dots = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 - a_1 \cdot 1 & a_2 - a_1 \cdot 1 & \dots & a_n - a_1 \cdot 1 \\ a_1^2 - a_1 \cdot a_1 & a_2^2 - a_1 \cdot a_2 & \dots & a_n^2 - a_1 \cdot a_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_1^{n-2} - a_1 \cdot a_1^{n-3} & a_2^{n-2} - a_1 \cdot a_2^{n-3} & \dots & a_n^{n-2} - a_1 \cdot a_n^{n-3} \\ a_1^{n-1} - a_1 \cdot a_1^{n-2} & a_2^{n-1} - a_1 \cdot a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-1} - a_1 \cdot a_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

$$
\det\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & (a_2-a_1)\cdot 1 & \cdots & (a_n-a_1) \\
0 & (a_2-a_1)\cdot a_2 & \cdots & (a_n-a_1)\cdot a_n \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & (a_2-a_1)\,a_2^{n-2} & \cdots & (a_n-a_1)\,a_n^{n-2}
\end{pmatrix}
$$

$$
= \underbrace{(a_2-a_1)\cdot \ldots \cdot (a_n-a_1)} \det\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 1 \\
a_2 & \cdots & a_n \\
\vdots & & \\
a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}
\end{pmatrix} = \cdots
$$

$\Longrightarrow$ ip induttiva

$$\dots = \underbrace{\prod_{1<j\leq n}(a_j-a_1)} \cdot \overbrace{\prod_{2\leq i<j\leq n}(a_j-a_i)}^{\text{Vandermonde } (n-1)\times(n-1) \text{ con coeff } a_2,\dots,a_n}$$

$$= \prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i). \qquad \blacksquare$$

II SOLUZ: considero $a_1, \dots, a_n$ come indeterminate, dunque

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

è un polinomio nelle indeterminate $a_1, \dots, a_n$.

Inoltre ogni monomio è prodotto di monomi di deg (complessivo nelle indeterminate):

$$\underset{\text{I riga}}{0} + \underset{\text{II riga}}{1} + \underset{\text{III riga}}{2} + \dots + \underset{\text{riga } n}{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Inoltre se $a_j = a_i$ vale 0 perché due colonne sono uguali $\Longrightarrow$ per Teorema di Ruffini è divisibile per $a_j - a_i$ $\forall i \neq j$

$\Longrightarrow$ siccome sono primi fra loro, è divisibile per

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

il quale ha grado $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

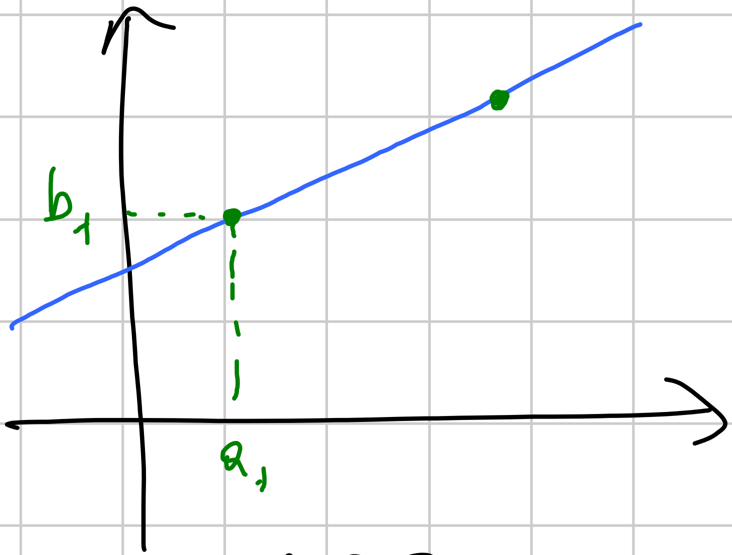
$$\Rightarrow \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{pmatrix} = \underset{\underset{\mathbb{K}}{\cap}}{c} \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$$

Resta da provare che $c = 1$: se considero $a_n^{n-1} \cdot a_{n-1}^{n-2} \cdot \ldots \cdot a_2^1 \cdot a_1^0$ vedo che ha coeff. $\underline{1}$ in entrambi $\Rightarrow$ OK. $\blacksquare$

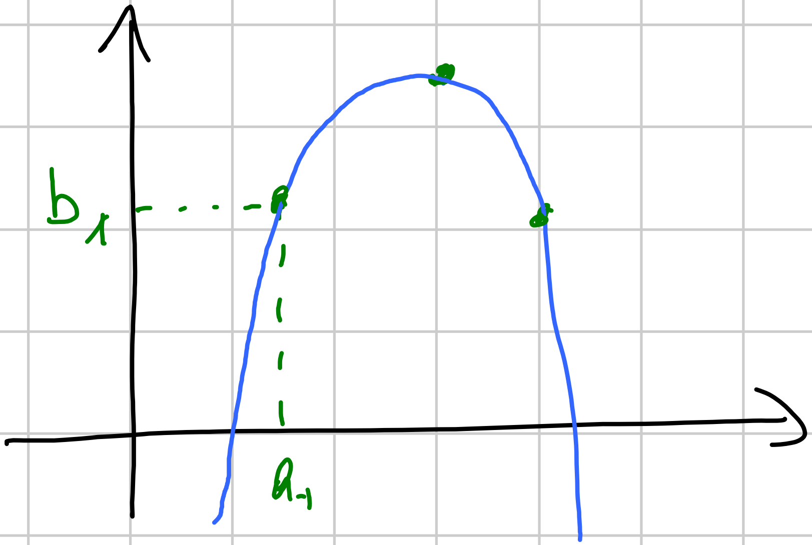
Applicazione : interpolazione polinomiale.

Dati n punti $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$

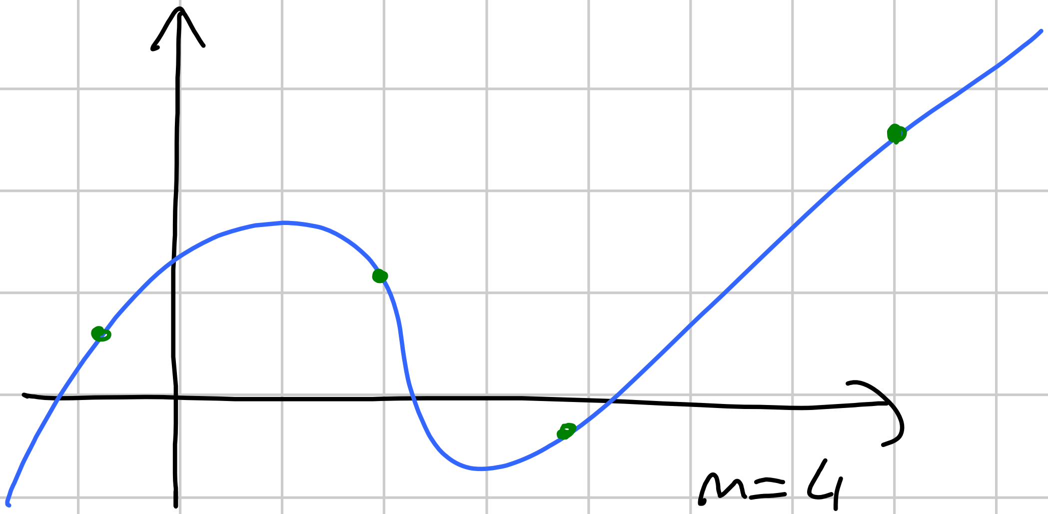
con ascisse distinte esiste un unico polinomio di grado $\leq n-1$ il cui grafico li contiene:



$n = 2$



$n = 3$



Infatti: cerco $p(x) = c_0 + c_1 \cdot x + c_2 \cdot x^2 + \dots + c_{n-1} \cdot x^{n-1}$

(cioè: cerco $c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R}$) t.c.

$$
\begin{cases}
c_0 + a_1 \cdot c_1 + a_1^2 \cdot c_2 + \cdots + a_1^{n-1} \cdot c_{n-1} = b_1 \\
\vdots \\
c_0 + a_n \cdot c_1 + a_n^2 \cdot c_2 + \cdots + a_n^{n-1} \cdot c_{n-1} = b_n
\end{cases}
$$

Sistema lineare nelle incognite $c_0, \dots, c_{n-1}$ con matrice incompleta

$$
\begin{pmatrix}
1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1}
\end{pmatrix} = \text{trasposta di Vandermonde}
$$

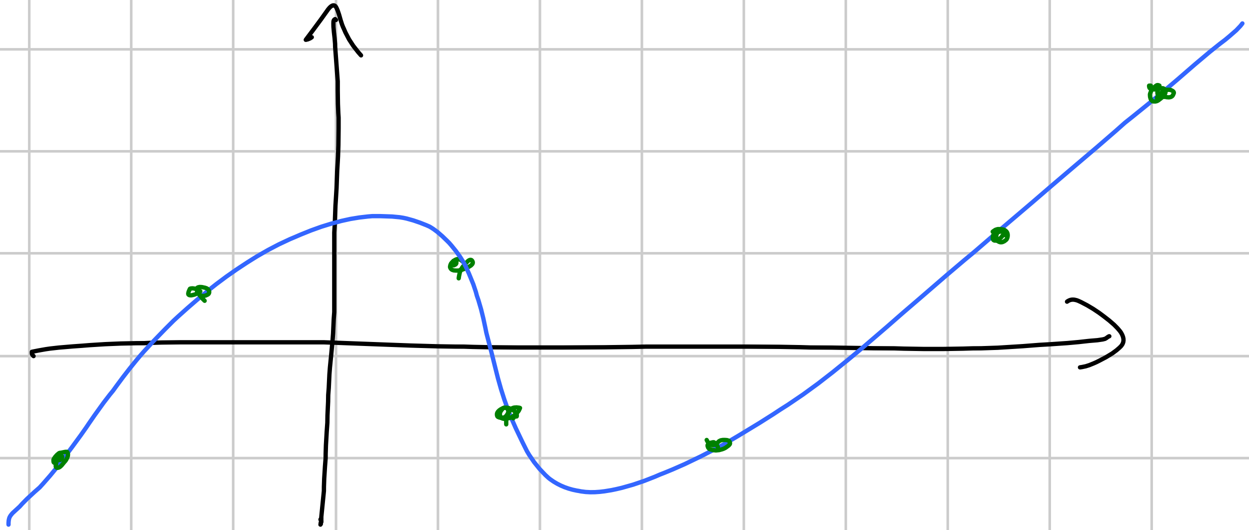
$\Longrightarrow$ ha det $= \prod_{1 \le i < j \le n} \underbrace{(a_j - a_i)}$

ascisse dei punti da interpolare

$\Longrightarrow \neq 0$ (ascisse distinte)

$\Longrightarrow$ soluzione unica —

Oss: il grado può essere $< n-1$:



<u>Def</u>: una $f : V \times V \to \mathbb{R}$ è un prodotto scalare se è

- bilineare
- simmetrica
- def. pos.

<u>Visto</u>: le appl. bilineari su $\mathbb{R}^n$ sono precisamente quelle del tipo $f = \langle \cdot | \cdot \rangle_{\underline{M}}$ con $\underline{M} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, dove

$$\langle x | y \rangle_M = {}^t y \cdot M \cdot x \,.$$

A2 **Prop**: $\langle\cdot|\cdot\rangle_M$ è simmetrica $\Longleftrightarrow$ M è simmetrica.

Dim: $\Longleftarrow$: Se M è simmetrica, cioè ${}^tM = M$, ho

$$\langle y|x\rangle_M \underset{\text{def}}{=} {}^tx \cdot M \cdot y \underset{\text{è } 1\times 1}{=} {}^t({}^tx \cdot M \cdot y) =$$

$$= {}^ty \cdot {}^tM \cdot x \underset{{}^tM = M}{=} {}^ty \cdot M \cdot x = \langle x|y\rangle_M .$$

$\Longrightarrow$: Supponiamo $\langle y|x\rangle_M = \langle x|y\rangle_M \ \forall x,y$

Come sopra ne segue:

$$^t y \cdot {}^t M \cdot x = {}^t y \cdot M \cdot x \quad \forall x,y$$

$$\Longrightarrow \ {}^t y \cdot ({}^t M - M) \cdot x = 0 \quad \forall x,y$$

Applicandolo con $x = e_i$, $y = e_j$ trovo

$$({}^t M - M)_{ji} = 0 \ \Longrightarrow \ {}^t M - M = 0. \ \blacksquare$$

Q3 : Per quali $\underline{M}$ simmetriche si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_M$ è def. pos. ?

Risposte parziali :

- Se $M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ allora :

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_{\underline{M}} \text{ è def pos} \iff \langle x | x \rangle_M > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\iff (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\iff \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2 > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$$

- Vero se $M = {}^tN \cdot N$ con $\det N \neq 0$; infatti:

$$\langle x | x \rangle_{\underline{M}} = {}^t x \cdot M \cdot x = {}^t x \cdot {}^t N \cdot N \cdot x$$

$$= {}^t (N \cdot x) \cdot (N \cdot x) = \langle N \cdot x | N \cdot x \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$\Rightarrow$ è > 0 poiché $N \cdot x \neq 0$

e $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ è def pos

<u>Esempio</u>: $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$\langle x | x \rangle_M = (x_1, x_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$= 2x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$

Non è def. pos.: per $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ho $\langle x|x\rangle_M < 0$.

- <u>Prop</u>: data $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ho che
  $\langle \cdot | \cdot \rangle_M$ è def. pos. $\Longleftrightarrow$ $a > 0$, $\det(M) > 0$.

(Vedremo che si generalizza ...)

<u>Dim</u>: $\Longrightarrow$ So che $\langle x|x\rangle_M > 0 \quad \forall x \neq 0$

cioè

$$(*) \quad a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 .$$

Se a fosse ≤ 0 ho $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = a \le 0$ assurdo.

Uso $(*)$ con $x = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ dunque ho

$$\underbrace{at^2 + 2bt + c}_{\text{polinomio di grado 2 in } t} > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \Delta/4 < 0$$

$$\Delta/4 = \underbrace{b^2 - ac}_{\parallel} < 0$$

$$- \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(M) > 0 .$$

$\Leftarrow$: So $a > 0$ e $b^2 - ac < 0$.

Devo vedere che

$$a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 > 0 \quad \forall x \neq 0 .$$

x_2 $= 0$ viene $a x_1^2 > 0$ poiché $a > 0$, $x_1 \neq 0$

x_2 $\neq 0$ viene $\underset{\vee}{x_2^2} \cdot \underbrace{(at^2 + 2bt + c)}$ con $t = \frac{x_1}{x_2}$

0 poli deg 2 con
$a>0$ e $\Delta/4<0$
$\Longrightarrow >0 \ \forall t$ $\boxed{/\!/\!/}$

Matrici 3×3? (Esercizi)

——— o ———

Fissiamo V sp. vett. reale con
un prodotto scalare $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

Def: chiamo norma associata a $\langle \cdot | \cdot \rangle$ la

$$\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

data da

$$\|x\| = \sqrt{\langle x | x \rangle}$$

(unica radice ≥ 0: esiste perché $\langle x|x \rangle \geq 0 \ \forall x$)

Oss: per $\mathbb{R}^n$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ ho

$$\|x\|_{\mathbb{R}^n} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = d(0, x)$$

e $\|x-y\|_{\mathbb{R}^n} = d(x,y)$

(distanza euclidea).

Prop: $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2$.

$(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\cdot b + b^2$

Dim: $\|v+w\|^2 = \langle v+w | v+w \rangle$

$\underset{\text{lin sx}}{=} \langle v | v+w \rangle + \langle w | v+w \rangle$

$$\overset{2x\,(\text{lin dx})}{=} \underbrace{\langle v|v\rangle}_{\substack{\| \\ \|v\|^2}} + \langle v|w\rangle + \underbrace{\langle w|v\rangle}_{\substack{\|\,\text{simm.} \\ \langle v|w\rangle}} + \underbrace{\langle w|w\rangle}_{\substack{\| \\ \|w\|^2}}$$

$\blacksquare$

<u>Cor</u>: $\langle v|w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2 \right)$ _

(Interpretaz: la distanza determina gli angoli _)

<u>Oss</u> (da fare subito dopo la def. di prod. scal.):
se ho $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ simmetrica ho
f lin. a sx $\iff$ f lin. a dx $\iff$ f bil.

Proprietà di $\|\cdot\|$:

- $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$ infatti

$$\|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda \cdot v | \lambda \cdot v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle v | v \rangle}$$
$$= \sqrt{\lambda^2} \cdot \sqrt{\langle v | v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\| \,\_$$

- Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz:

$$|\langle v|w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

e l'= vale solo se v e w sono proporzionali.

Dimo: Se sono proporz., ad es $w = \lambda \cdot v$ ho

$$|\langle v|w\rangle| = |\langle v|\lambda v\rangle| = |\lambda \cdot \langle v|v\rangle| = |\lambda| \cdot \|v\|^2$$

$$\|v\| \cdot \|w\| = \|v\| \cdot \|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|^2$$ OK.

Se non sono proporzionali ho $tv + w \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \|tv + w\|^2 > 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad t^2 \cdot \|v\|^2 + 2t \langle v|w \rangle + \|w\|^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \Delta/4 < 0$

$\Rightarrow \quad \langle v|w \rangle^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 < 0$

$\Rightarrow \quad |\langle v|w \rangle| < \|v\| \cdot \|w\|.$ $\blacksquare$

- Disuguaglianza triangolare:

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|$$

<u>Dim</u>:

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2$$

$$\underset{C-S}{\leq} \|v\|^2 + 2\|v\|\cdot\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\|+\|w\|)^2$$

prendo $\sqrt{\ }$ ... $\blacksquare$

Def: dato $\langle \cdot | \cdot \rangle$ prod. scal. su V e $\|\cdot\|$ la norma associata, chiamo distanza associata la $d: V \times V \to \mathbb{R}$ data da

$$d(v,w) = \|v-w\| .$$

Proprietà:

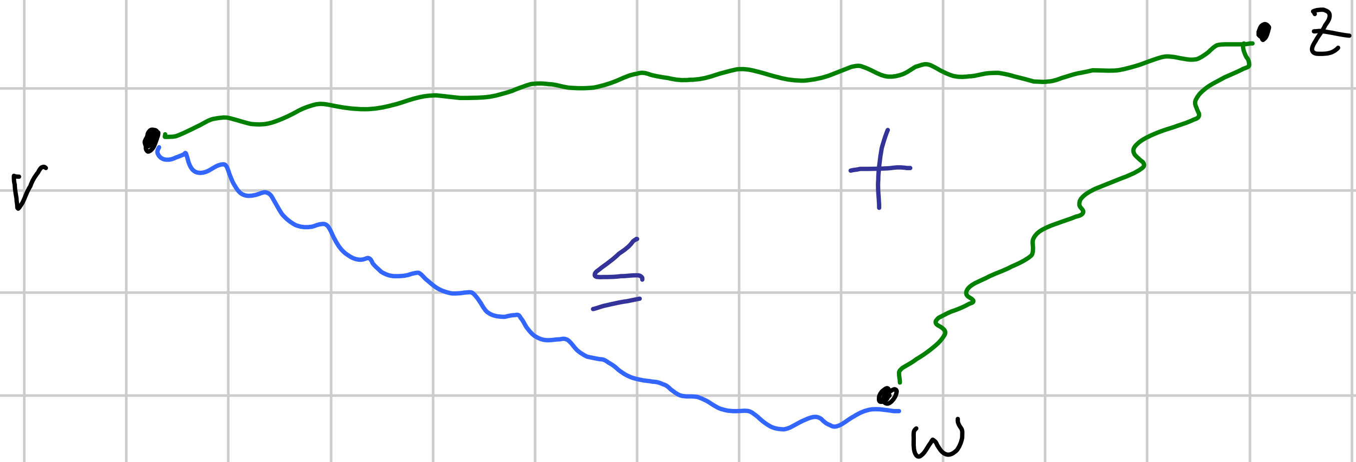
- $d(v,w) > 0$ se $w \neq v$ e $d(v,v) = 0$
- $d(w,v) = d(v,w)$
- $d(v,w) \leq d(v,z) + d(z,w)$

Infatti:

- $d(v,w) = \|v-w\|$ sempre >0 tranne se $v-w=0$

- $d(w,v) = \|w-v\| = \|-(v-w)\|$
  $= \|v-w\| = d(v,w)$

- $d(v,w) = \|v-w\| =$
  $= \|(v-z)+(z-w)\| \underset{\text{trie}}{\leq} \|v-z\| + \|z-w\|$
  $= d(v,z) + d(z,w)$



v
z
w
≤
≠