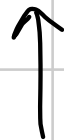


Geometria 4/3/15

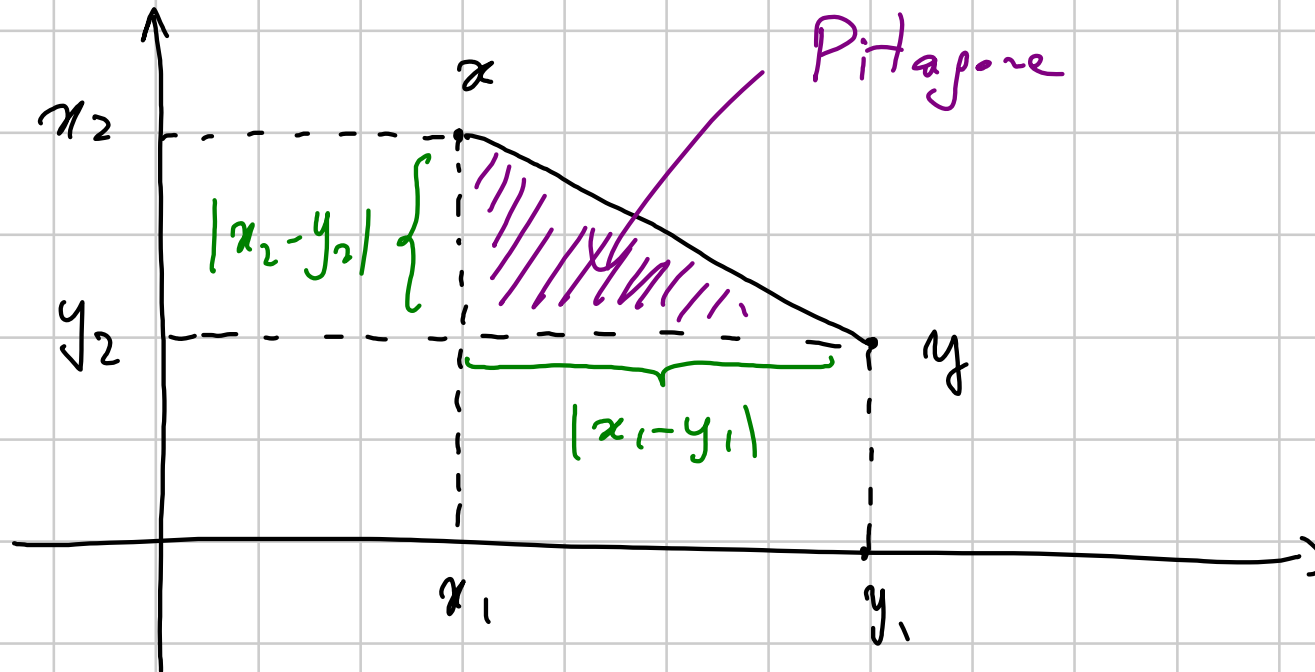


"misura della terra"

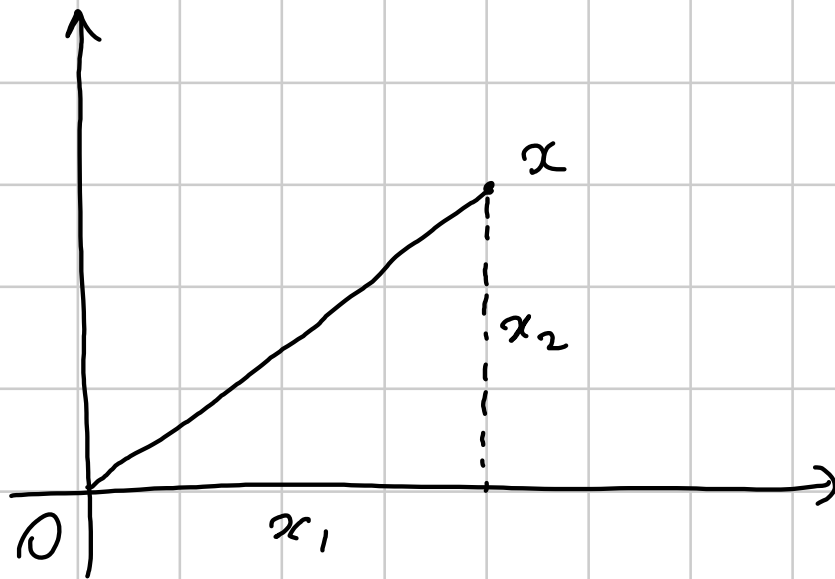


calcolo di distanze
(e angoli)

Distanze (ordinaria) nel piano euclideo.

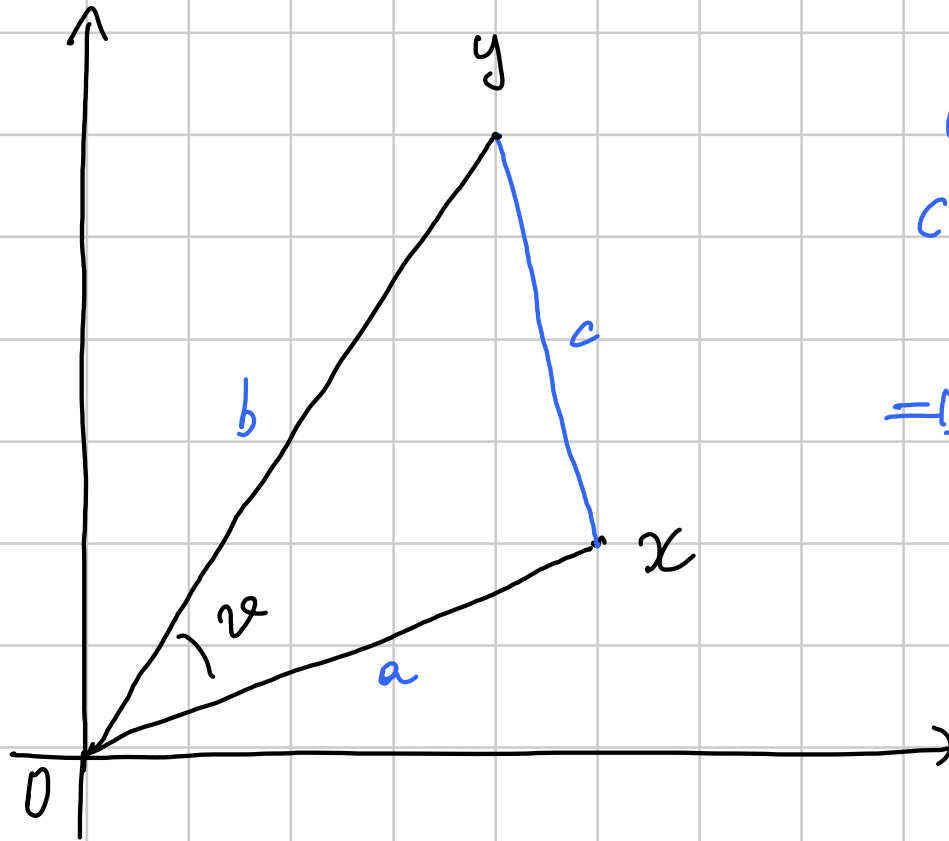


$$\Rightarrow d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$



$$d(0, x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

Angolo formato nell'origine dai vettori $x, y \in \mathbb{R}^3$:



Law of Cosines:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos v$$

$$\Rightarrow \cos v = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$a = d(O, x)$$

$$b = d(O, y)$$

$$c = d(x, y)$$

$$\Rightarrow \cos \vartheta = \frac{d(0,x)^2 + d(0,y)^2 - d(x,y)^2}{2 d(0,x) d(0,y)} =$$

$$= \frac{(x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) - ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)}{2 \cdot \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}} =$$

$$= \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}.$$

Dimostrare: $\langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^2} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

↓
prodotto scalare canonico in $\mathbb{R}^2$ tra x e y

Scoperto: $d(0, x) = \sqrt{\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^2}}$

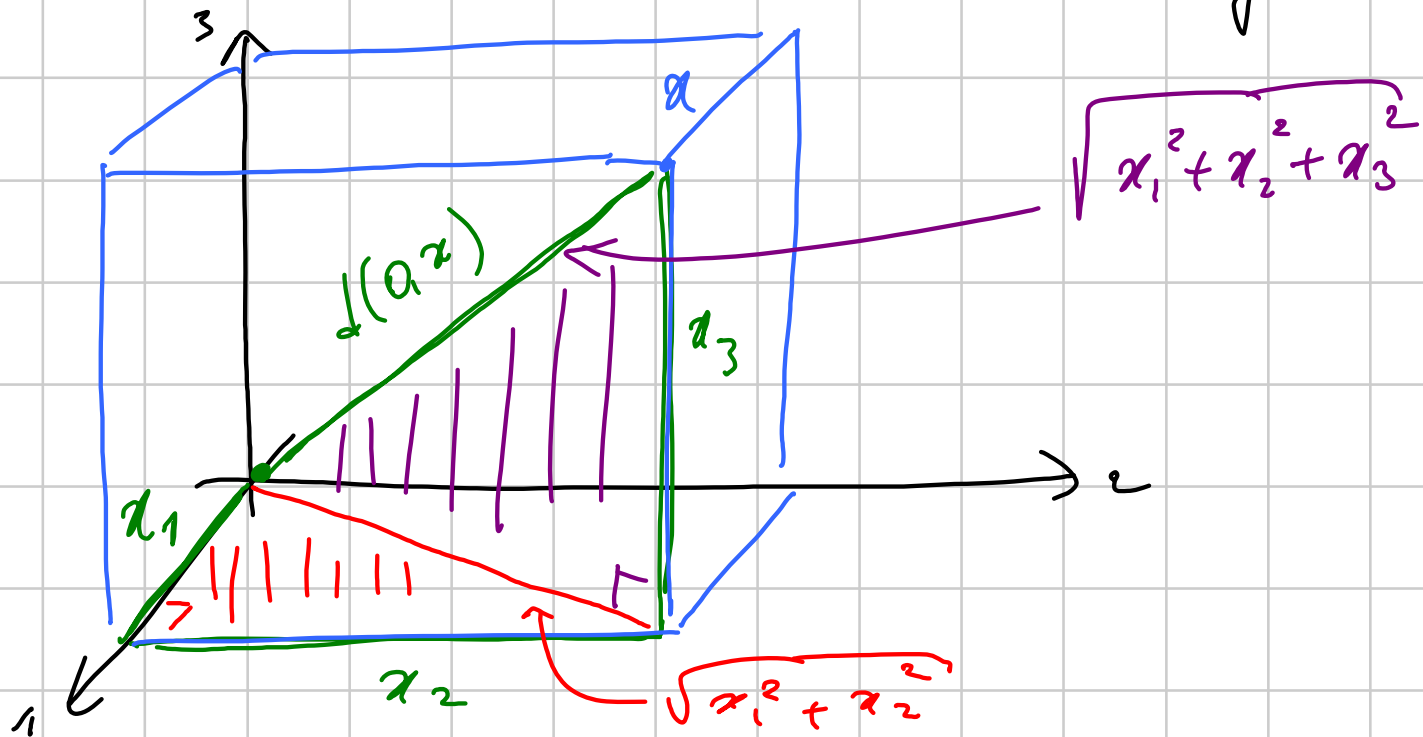
$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y | x - y \rangle_{\mathbb{R}^2}}$$

$$\cos \angle(x, y) = \frac{\langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\sqrt{\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^2}} \cdot \sqrt{\langle y | y \rangle_{\mathbb{R}^2}}}.$$

Monde : $\langle x(y) \rangle_{\mathbb{R}^2} = x_1 y_1 + x_2 y_2$

contiene le nozioni di distanza e angoli in $\mathbb{R}^2$

in $\mathbb{R}^3$:



y a general in $\mathbb{R}^n$:

$$d(0, x) = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

(applicants cannot come from a $\widehat{Oxy}$).

$$\cos \angle(x, y) = \frac{x_1 y_1 + \dots + x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}}$$

Definisco ora: $\langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

prodotto scalare canonico
tra x e y in $\mathbb{R}^n$

(Come sopra: continue distanza e angoli in $\mathbb{R}^n$)

ATTENZIONE: di prod. scal. su $\mathbb{R}^n$
ce ne saranno altri; quello canonico è uno di essi.

Oss : $\langle x|y \rangle_{\mathbb{R}^n} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

Si può scrivere come $\langle x|y \rangle_{\mathbb{R}^n} = {}^t y \cdot x$
poiché

$${}^t y \cdot x = \underbrace{(y_1, \dots, y_n)}_{1 \times n} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{n \times 1} = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

1×1

Oss: $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$

i posti dove vanno
scritte le due variabili

• è una funzione da $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}$, cioè:

• è una funzione che ha come argomento (variabile) una coppia di vettori di $\mathbb{R}^n$ (ovvero: due vettori di $\mathbb{R}^n$) e come valore un numero —

$$\underline{\text{Es:}} \quad \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} = 7 \cdot (-1) + (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 5 = -9$$

arguments: vettori

value: numero

Proprietà della funzione: $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$:

- è bilineare, cioè è lineare in ciascuna delle

due variabili fissate l'altra:

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 / y \rangle_{\mathbb{R}^n} = \lambda_1 \langle x_1 / y \rangle_{\mathbb{R}^n} + \lambda_2 \langle x_2 / y \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

$$\langle x / (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \rangle_{\mathbb{R}^n} = \lambda_1 \langle x / y_1 \rangle_{\mathbb{R}^n} + \lambda_2 \langle x / y_2 \rangle_{\mathbb{R}^n}$$

(verifico la seconda:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= {}^t(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) \cdot x = (\lambda_1 {}^t y_1 + \lambda_2 {}^t y_2) \cdot x \\ &= \lambda_1 {}^t y_1 \cdot x + \lambda_2 {}^t y_2 \cdot x = \text{RHS} \end{aligned}$$

• è simmetrico: $\langle y / x \rangle_{\mathbb{R}^n} = \langle x / y \rangle_{\mathbb{R}^n}$

$$\text{LHS} = {}^t x \cdot y \underset{\substack{\uparrow \\ e^{-1 \times 1}}}{=} {}^t ({}^t a \cdot y) = {}^t y \cdot x = \text{RHS}$$

Esercizio: ${}^t(A \cdot B) = {}^t B \cdot {}^t A$ _

• $\bar{e}$ definitopositivo: $\langle x | x \rangle_{\mathbb{R}^n} > 0$ per $x \neq 0$

Yuffatti $x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0$ per $x \neq 0$ _

Usiamo le tre proprietà come paradigma per la:

Def: dato V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$

chiamiamo che una funzione $f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ è:

- bilineare se lin. in ciascun argomento

fissato l'altro:

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 f(v_1, w) + \lambda_2 f(v_2, w) \quad \forall \dots$$

$$f(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 f(v, w_1) + \lambda_2 f(v, w_2) \quad \forall \dots$$

- simmetrica se $f(w, v) = f(v, w) \quad \forall v, w \in V$
- definita positiva se $f(v, v) > 0 \quad \forall v \neq 0$
- un prodotto scalare se valgono le tre precedenti.

Esempio 1: $V = M_{m \times m}(\mathbb{R})$ -

$$\langle A | B \rangle = \text{tr} \left(\underbrace{{}^t B}_{m \times m} \cdot \underbrace{A}_{m \times m} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{m \times m \\ 1 \times 1 \in \mathbb{R}}}$

Affermo che è prod. scalare:

• bilineare:

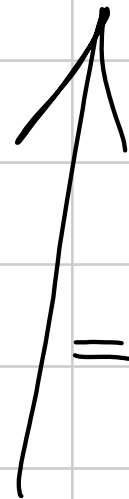
$$\langle \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 | B \rangle \neq \lambda_1 \langle A_1 | B \rangle + \lambda_2 \langle A_2 | B \rangle$$

$$\langle A | \lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2 \rangle \neq \lambda_1 \langle A | B_1 \rangle + \lambda_2 \langle A | B_2 \rangle \quad (\text{si})$$

//

$$t_n \left(\begin{matrix} t \\ \parallel \end{matrix} (\lambda_1 B_1 + \lambda_2 B_2) \cdot A \right)$$

$$t_n \left((\lambda_1 {}^t B_1 + \lambda_2 {}^t B_2) \cdot A \right)$$



$$\text{tr} \left(\overset{''}{\lambda_1} {}^t B_1 \cdot A + \overset{''}{\lambda_2} {}^t B_2 \cdot A \right)$$

$$\lambda_1 \text{tr}({}^t B_1 \cdot A) + \lambda_2 \text{tr}({}^t B_2 \cdot A)$$

• symmetrica,

$$\langle B/A \rangle = \langle A/B \rangle$$

$$\text{tr}({}^t A \cdot B)$$

$\uparrow =$

$$\text{tr}({}^t({}^t A \cdot B)) = \text{tr}({}^t B \cdot A)$$

$\overline{a}$

$\overline{n}$

• definite positive : $\langle A|A \rangle > 0 \quad \forall A \neq 0$

//

$$tn(^tA \cdot A) =$$

$$= \sum_{i=1}^n (^tA \cdot A)_{ii} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (^tA)_{ij} \cdot (A)_{ji}$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (A)_{ji} \cdot (A)_{ji} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ji}^2$$

= la somma dei quadrati di tutti i coeff di A

$\Rightarrow e' > 0$ per $A \neq 0$.

Esempio : $V = C^0([0,1], \mathbb{R})$

↑ lo spazio delle funzioni
continue su $[0,1]$.

$$\langle x|y \rangle = \int_0^1 x(t) \cdot y(t) dt \quad (x, y \text{ è continue} \\ \Rightarrow \text{integrabile})$$

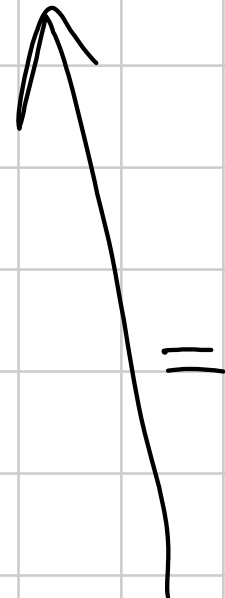
$\mathcal{L}$ mod. scal :

• bilinear :

$$\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \mid y \rangle \stackrel{?}{=} \lambda_1 \langle x_1 \mid y \rangle + \lambda_2 \langle x_2 \mid y \rangle$$

$$\int_0^1 (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)(t) \cdot y(t) dt$$

$$\int_0^1 (\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)) \cdot y(t) dt$$



$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 (\lambda_1 x_1(t) y(t) + \lambda_2 x_2(t) y(t)) dt \\
 & \lambda_1 \int_0^1 x_1(t) y(t) dt + \lambda_2 \int_0^1 x_2(t) y(t) dt
 \end{aligned}
 \quad \Bigg\} \quad \hat{x}$$

(analogous to $\int x$)

• symmetric:

$$\langle x|y \rangle \neq \langle y|x \rangle$$

//

//

$$\int_0^1 x(t) y(t) dt$$

$$\int_0^1 y(t) \cdot x(t) dt$$

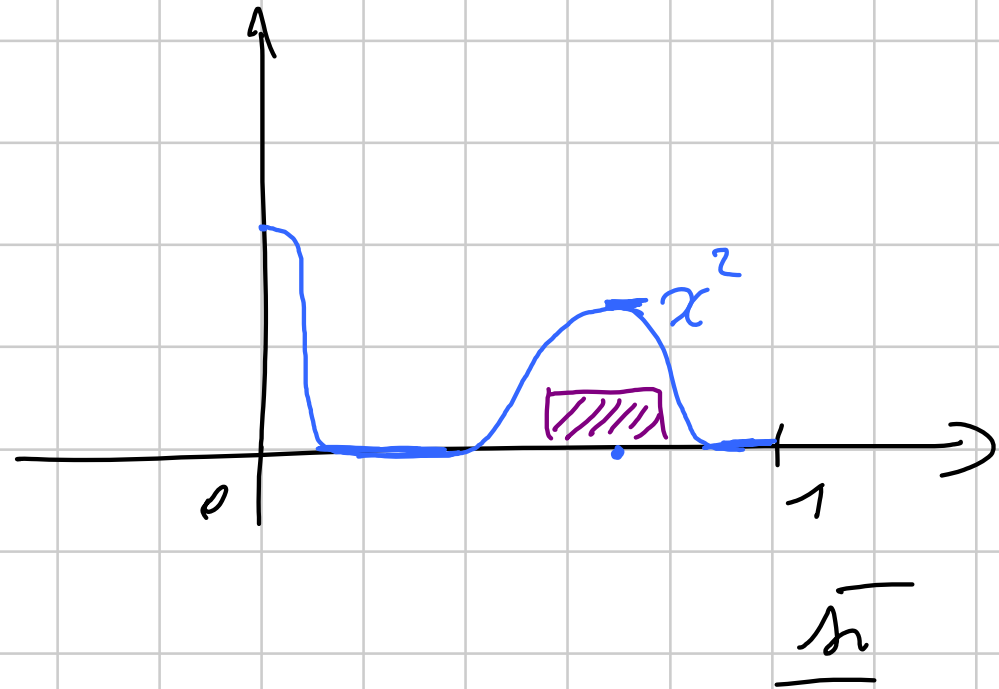
$\bar{n}$

• def. pos: $\langle x|x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$?

//

$$\int_0^1 x(t) \cdot x(t) dt$$

$$\int_0^1 x(t)^2 dt$$



Esempio 3: su $\mathbb{R}^2$ prendiamo

$$\langle x|y \rangle = 3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$$

Affermo che $\bar{e}$ è un prod. scal.:

• bilineare:

$$\langle \lambda x + \mu z | y \rangle \stackrel{?}{=} \lambda \langle x | y \rangle + \mu \langle z | y \rangle$$

$$3(\lambda x + \mu z)_1 \cdot y_1 + 2(\lambda x + \mu z)_1 \cdot y_2 +$$

$\nearrow =$

$$+ 2(\lambda x + \mu z)_2 \cdot y_1 + 5(\lambda x + \mu z)_2 \cdot y_2$$

$$= \mathcal{A} \left(3x_1 y_1 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + 5x_2 y_2 \right) + \mu \left(3z_1 y_1 + 2z_1 y_2 + 2z_2 y_1 + 5z_2 y_2 \right) \left. \vphantom{\mathcal{A}} \right\} \sqrt{N}$$

(and op. a dx)

• Symmetrie: $\underbrace{\langle y | x \rangle}_{\text{"}} \neq \underbrace{\langle x | y \rangle}_{\text{"}}$

$$\underbrace{3y_1 x_1}_1 + \underbrace{2y_1 x_2}_2 + \underbrace{2y_2 x_1}_3 + \underbrace{5y_2 x_2}_4$$

$$\underbrace{3x_1 y_1}_1 + \underbrace{2x_1 y_2}_3 + \underbrace{2x_2 y_1}_2 + \underbrace{5x_2 y_2}_4$$

n

• def. pos $\langle x|x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0$?

//

$$3x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

// + trucco

$$x_1^2 + \underbrace{2x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2}_{+ 3x_2^2}$$

$$x_1^2 + 2(x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2$$

È somma di 3 quadrati $\Rightarrow e' \geq 0$;

nullo solo se tutti nulli, cioè solo se $\underline{\underline{x=0}}$

Dall'esempio emerge:

Q: quali sono i prodotti scalari su $\mathbb{R}^n$?

Cioè, data $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Q1: quando è che f è bilineare?

Q2: quando $\bar{\tau}$ anche simmetrica?

Q3: quando $\bar{\tau}$ anche definito positivo?

Def: data $M \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ propo

$$\langle x|y \rangle_M = \underbrace{{}^t y}_{1 \times m} \cdot \underbrace{M}_{m \times m} \cdot \underbrace{x}_{m \times 1}$$

e la chiamo applicazione bilineare associata a M .

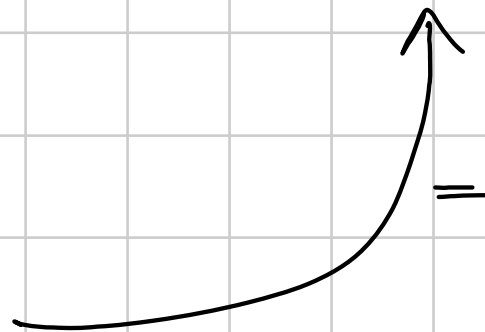
Prop: $\tilde{\cdot}$ defines bilinear - $\langle \cdot | \cdot \rangle_M: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Dim:

$$\langle \lambda x + \mu z | y \rangle_M \neq \lambda \langle x | y \rangle_M + \mu \langle z | y \rangle_M$$

$${}^t y \cdot M \cdot (\lambda x + \mu z)$$

$$\lambda \cdot {}^t y \cdot M \cdot x + \mu \cdot {}^t y \cdot M \cdot z$$



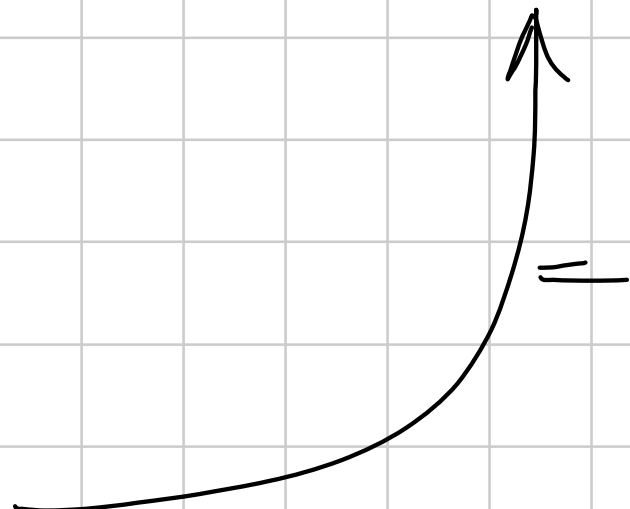
$\tilde{\cdot}$

$$\langle x | \lambda y + \mu z \rangle_M \stackrel{?}{=} \lambda \langle x | y \rangle_M + \mu \langle x | z \rangle_M$$

$${}^t(\lambda y + \mu z) \cdot M \cdot x$$

$$\stackrel{||}{=} ({}^t\lambda y + {}^t\mu z) \cdot M \cdot x$$

$$\lambda {}^t y M x + \mu {}^t z M x$$



$\bar{n}$

~~$\mathbb{R}$~~

Prop: data $f: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear
 esiste unica $M \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ t.r.

$$f = \langle \cdot | \cdot \rangle_M -$$

(Cioè : "Le applicazioni bilineari su $\mathbb{R}^n$
sono precisamente quelle associate
alle matrici $n \times n$ -")

Dim : Unicità; supponiamo che $f = \langle \cdot | \cdot \rangle_M$,

$$\text{cioè } f(x, y) = \langle x | y \rangle_M \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n -$$

Applico cioè con $x = e_i$ e $y = e_j$

$$\Rightarrow f(e_i, e_j) = \langle e_i | e_j \rangle_M = {}^t e_j \cdot M \cdot e_i$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \underset{\substack{\uparrow \\ j}}{1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{m1} & \dots & m_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \underset{\substack{\leftarrow \\ i}}{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= m_{ji}$$

Donc M est déterminée de f .

Esistenza : date f possiamo $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$

la matrice t.r. $m_{ji} = f(e_i, e_j)$

(so che deve essere lei) — Provo che va bene:

$$f(x, y) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right)$$

$$\stackrel{\substack{= \\ \uparrow \\ \text{bilineari't\`e di } f}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \underbrace{f(e_i, e_j)}_{m_{ji}}$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n y_j \cdot m_{ji} \right) \cdot x_i$$

$$\underbrace{\left({}^t y \cdot M \right)_i}_{\text{}} \cdot x_i$$

$$\underbrace{{}^t y \cdot M \cdot x}_{\text{}} = \langle x | y \rangle_M.$$

