

Geometria 1/4/15

Teo spettroli su $\mathbb{C}$:

Def: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ normale se $A \cdot A^* = A^* \cdot A$.

Teo: A normale $\iff$ diagonalizzabile via unitaria
cioè $\exists U$ t.c. $U^* = U^{-1}$ e
 $U^{-1} \cdot A \cdot U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Casi particolari:

-) $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ hermitiana, cioè $A^* = A$ -
Certamente normale -

Lemma: $A^* = A \implies$ autord. reali.

Dimo (come per sinu): $A \cdot z = \lambda \cdot z$

$$\langle Az | z \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \lambda z | z \rangle = \lambda \cdot \|z\|^2$$

$$\overset{''}{\langle z | Az \rangle_{\mathbb{C}^n}} = \langle z | \lambda z \rangle = \overline{\lambda} \cdot \|z\|^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R} \quad \square$$

Prop: A hermitiane $\Leftrightarrow$ si diagonalizza
via unitarie e ha autovalori $\in \mathbb{R}$.

Dim: $\Rightarrow$ visto -

$$\Leftrightarrow M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad M^* = M^{-1}$$

$\lambda_j \in \mathbb{R}$

allora $A = M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot M^*$

allora $A^* = M^{**} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & \ddots & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix} \cdot M^*$

$$= M \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \ddots \\ 0 & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot M^*$$

allora $A^* = A$



Teo: dato A hermitiana,

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos. $\iff A$ ha autoval. > 0

$$\underline{\text{Dim (come su } \mathbb{R})} : \quad M^* \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\langle z | z \rangle_A = \langle M \cdot w | M \cdot w \rangle_A \quad (w = M^{-1} \cdot z)$$

$$= w^* \cdot M^* \cdot M \cdot w = w^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} w$$

$$= \lambda_1 \cdot |w_1|^2 + \dots + \lambda_n \cdot |w_n|^2$$

$\mathcal{E}$ sempre pos, $\forall w \neq 0$ (cioè $\forall z \neq 0$)

$\Leftrightarrow$ ogni λ_j è > 0 -



Teo: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ is def pos.

$$\Leftrightarrow \det(A_j) > 0 \quad j = 1 \dots n$$

$$\text{or } A = \left(\underbrace{A_j}_j \right)_i$$

Ex: $\begin{pmatrix} 3 & 4+i \\ 4-i & 5 \end{pmatrix} = A \quad (\text{hermitian})$

$$d_1 = \det(A_1) = 3 > 0$$

$$\begin{aligned} d_2 = \det(A_2) = \det(A) &= 3.5 - (4-i)(4+i) \\ &= 3.5 - (16+1) < 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \langle \cdot | \cdot \rangle_A$ nom $\bar{e}$ def. pos.

•) antihermitienne: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$
 $A^* = -A$

Lemma: A antihermitian $\Rightarrow$ autovel $\in i \cdot \mathbb{R}$

Dim: $A \cdot z = \lambda z$

$$\langle Az | z \rangle = \dots = \lambda \cdot \|z\|^2$$

$$\langle z | A^* z \rangle = \langle z | -Az \rangle = \dots = -\overline{\lambda} \cdot \|z\|^2$$

$$\Rightarrow \overline{\lambda} = -\lambda \Rightarrow \lambda \in i \cdot \mathbb{R} \quad \square$$

Oss: A antiherm $\Rightarrow A$ normal

Prop : $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$

A antihermitian $\iff$ si diagonalize
transformare unitară
e are autoval $\in i \cdot \mathbb{R}$

•) unitară : $A^* = A^{-1}$

Oss : A unitară $\implies A$ normală
($A^* \cdot A = I_n = A \cdot A^*$)

Lemma: A unitaire $\implies$ autoval hanno modulo 1.

Dim: $A \cdot z = \lambda \cdot z$

$$\underbrace{\langle Az | Az \rangle}_{\|z\|^2} = \underbrace{\langle \lambda z | \lambda z \rangle}_{|\lambda|^2 \cdot \|z\|^2} = \|\lambda z\|^2$$

$$\implies |\lambda| = 1$$



•) Quanto detto sopra per
hermitiano / antihermitiano / unitarie complene
vale per simmetriche / antisimmetriche / ortogonali reali.

Dunque si diagonalizzano su $\mathbb{C}$: poco interessante.

••) Simmetriche : si diagonalizzano (su $\mathbb{R}$)
via ortogonali OK -

••) antisimmetrische -

Teo: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ antisimmetrisch
 $\Rightarrow \exists M$ orthogonal ($M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$
 ${}^t M = M^{-1}$) t.c.

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} B_1 & | & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & | & B_2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & B_3 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \text{ con}$$

$$B_j = (0)$$

$$B_j = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

(diagonalizzazione a blocchi) —

Oss: $\text{autovl}(0) = 0$

$$\text{autovl} \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} = \text{radici}(t^2 + \lambda^2) = \pm i\lambda$$

Applicazione al caso 3×3 :

$A \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ antisimmetric / ad n.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Teo: È coniugata via ortog. a

una diagonale a blocchi con

blocchi $\begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \quad 1 \times 1 \quad \begin{pmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{pmatrix} \quad 2 \times 2$

$\nearrow A = 0$

$\searrow \begin{pmatrix} 0 & -\lambda & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dunque A ha sempre l'autoval. 0
e gli altri due sono $\pm i\lambda$ -

(Intero: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$
 n dispari $\implies A$ ha almeno un
autovettore reale;

se A è antisimmetrica esso è anche
imm. puro $\implies$ è nullo -)

Per noi:

$$P_A(t) = \det(t \cdot I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} t & -2 & -3 \\ 2 & t & -1 \\ 3 & 1 & t \end{pmatrix}$$

$$= t^3 + 6 - 6 + 9t + 4t + t = t^3 + 14t$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{14}$$

$\Rightarrow \exists$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ (v_1, v_2, v_3)

rispetto a cui A è le matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{14} & 0 \\ \sqrt{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v_1 = \sqrt{14} \cdot v_2$$

$$A \cdot v_2 = -\sqrt{14} \cdot v_1$$

$$A \cdot v_3 = 0$$

Idea della dimo del Teo -

Ho A antisimmetrico. So:

- ha autov. in $i \cdot \mathbb{R}$
- esiste una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$
 $z_1, \dots, z_n$ che lo diagonalizzo -

Considero uno degli autov.;

*) nullo: posso scegliere il corrisp.
autovettore reale -

* non nulla : $i \cdot I$ ($I \neq 0$)
e ho un'autovalore $z = x + iy$ -

Nota :

$$1) A \cdot z = iI \cdot z$$

$$\Rightarrow A \cdot (x + iy) = iI \cdot (x + iy)$$

$$\Rightarrow (Ax) + i(Ay) = -I \cdot y + i(Ix)$$

$$\Rightarrow A \cdot x = -Iy, \quad A \cdot y = Ix$$

Sulle base (y, x) di $\text{Span}(x, y)$
la A agisce come

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) $\bar{z} = x - iy$ è un autovettore di A
rispetto all'autore $-i1$
(prendo $A \cdot z = i1z$, coniugo
e trovo $A \cdot \bar{z} = -i1 \cdot \bar{z}$)

$$\Rightarrow (\text{Toeplitz}) \quad \langle z | \bar{z} \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$$

$$\Rightarrow \langle x + iy | x - iy \rangle_{\mathbb{C}^n} = 0$$

$$\Rightarrow ({}^t x + i {}^t y)(x + iy) = 0$$

$$\Rightarrow {}^t x \cdot x + i {}^t x \cdot y + i {}^t y \cdot x - {}^t y \cdot y = 0$$

$$\Rightarrow \|x\|^2 - \|y\|^2 + 2i \langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \|x\| = \|y\| \\ \langle x | y \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ a meno di moltiplicare per $\sqrt{2}$
 la base (y, x) trovata sopra è
 ortonormale — $[...]$ 

••) ortonormali — $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$
 ${}^t A = A^{-1}$

$\Rightarrow \bar{e}$ unitaria $\Rightarrow$ diapo via unitaria e
ha autovettori di
modulo 1.

Prendo un autovettore:

*) reale: ± 1 , e ha autovettore reale.

*) non reale: $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ ($\varphi \neq 0$)

Se $z = x + iy$ è un autovett. relativo ho:

$$Az = e^{i\varphi} \cdot z$$

$$A \cdot (x + iy) = (\cos \varphi + i \sin \varphi)(x + iy)$$

$$\begin{cases} A \cdot x = \cos \varphi \cdot x - \sin \varphi \cdot y \\ A \cdot y = \sin \varphi \cdot x + \cos \varphi \cdot y \end{cases}$$

$\Rightarrow$ rispetto alla base (x, y) di $\text{Span}(x, y)$
 la A agisce come la matrice

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Cioè come la rotazione di angolo ϑ -

Ora, come sopra, usando il fatto che $\bar{z}$ è autovettore rispetto a $e^{-i\vartheta}$

$$(A \cdot z = e^{i\vartheta} \cdot z \implies A \cdot \bar{z} = e^{-i\vartheta} \cdot \bar{z})$$

Si vede che (x, y) può essere presa
ortogonale -

Teo: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ ortogonale
(cioè isometria, cioè ${}^t A = A^{-1}$
cioè colonne = base ortogonale)

allora esiste M ortogonale t.c.

$$M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & 0 \\ 0 & \boxed{B_2} \\ & & \ddots \end{pmatrix}$$

con $B_j = (\pm 1)$ 1×1

$$B_j = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad 2 \times 2.$$

Quindi le isometrie sono composte di:

(1) id.

(2) riflessione rispetto a iperpiano
(sottosp. di codim 1)

(3) rotazione intorno a sottosp. di codim. 2

con tutti i sottosp. dei punti (2) + (3)
ortogonali fra loro -

Esempio: $n = 3$ -

Può essere;

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

identico

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

riflessione rispetto a un piano

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

riflessione rispetto a retta
(= rotazione di π intorno l)

$$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

riflessione rispetto a O

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotazione L
angolo ϑ intorno
a retta l

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta & 0 \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

rotazione L angolo
 ϑ intorno a retta l
+ riflessione rispetto

al piano $\ell^\perp$

Oss: i movimenti rigidi dello spazio

(cioè: trasformazioni anche non lineari e fissi
che mantengono le distanze) sono i
precedenti tipi composti con traslazioni -

————— ○ —————

(25b) $Y_u \mathbb{R}^3$: matrice di rotaz. di $\pi/6$
intorno a $\text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ -

Cerco una base (v_1, v_2, v_3) ortonormale in cui $v_1 \in \text{Span} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ - Rispetto a essa ho:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \mp 1/2 \\ 0 & \pm 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = A_0$$

Ovvero la matrice cercata A soddisfa:
se $M = (v_1, v_2, v_3)$ ho

$${}^t M \cdot A \cdot M = A_0 \Rightarrow A = M \cdot A_0 \cdot {}^t M$$

Resta da trovare (v_1, v_2, v_3) :

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad v_3 = v_1 \wedge v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \dots$$

②⑥ Data $M \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ con ${}^t M \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$
con ogni $\lambda_j \neq 0$ trovare le
 $D = \begin{pmatrix} x_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x_n \end{pmatrix}$ t.c. $M \cdot D$ sia ortogonale

Se $M = (v_1, \dots, v_m)$ l'ipotesi è che $\langle v_i | v_j \rangle = \lambda_j \cdot \delta_{ij}$.

$$M \cdot D = (v_1 \dots v_m) \begin{pmatrix} x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & x_m \end{pmatrix} = (x_1 v_1, \dots, x_m v_m)$$

Vogliamo che $(x_1 v_1, \dots, x_m v_m)$ sia ortonormale;
è già ortogonale: resta da scegliere

$$x_j = \pm \frac{1}{\|v_j\|} = \pm \frac{1}{\lambda_j}$$

② In $\mathbb{C}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$ trovare tutti i vettori unitari, con seconda componente $\in i \cdot \mathbb{R}$ e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$.

Isolgo: cerco $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ e impongo:

$$\begin{cases} |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z_2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix} \middle| z \right\rangle = 0 \end{cases}$$

↖ cioè $(2+i)z_1 + (1-3i)z_2 = 0$

o equiv: $(2-i)\overline{z_1} + (1+3i)\overline{z_2} = 0$

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ (2+i)(x_1 + iy_1) + (1-3i)(x_2 + iy_2) = 0 \end{cases}$$

[conti]

II svolg: Voglio 1) unitario
2) $z_2 \in i\mathbb{R}$
3) $z \perp \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$

Dimentico 1) e cerco $z = \begin{pmatrix} a \\ i \end{pmatrix}$ ($\Rightarrow$ (2) automatico)
imponendo 3); alla fine $\pm$ normalizzo:

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ i \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$(2+i) \cdot a + (1-3i) i = 0$$

$$a = \frac{-3-i}{2+i} = -\frac{(3+i)(2-i)}{5} = -\frac{7-i}{5}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (-7+i)/5 \\ i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i-7 \\ 5i \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \pm \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i-7 \\ 5i \end{pmatrix}$$

Svolg III : esempio : 1) z unitario

2) $z_2 \in i\mathbb{R}$

3) $z \perp \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$

Impongo prima 3:

~~$z = \begin{pmatrix} 1+3i \\ i-2 \end{pmatrix}$~~

~~NO~~

$z = \begin{pmatrix} 1-3i \\ -i-2 \end{pmatrix}$

$\leadsto z = \begin{pmatrix} 3i-1 \\ 2+i \end{pmatrix}$

Realizzo 2 :

$$z = i(2-i) \begin{pmatrix} 3i-1 \\ 2+i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1+2i)(3i-1) \\ 5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+i \\ 5i \end{pmatrix}$$

Realizzo 1 :

$$\pm \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i-7 \\ 5i \end{pmatrix} -$$