Esercizî di Geometria

(Carlo Petronio)

Foglio del 27/4/2015

Esercizio 1 Determinare l'espressione dell'isometria di $\mathbb{R}^2$ descritta:

(a) La riflessione σ rispetto alla retta ℓ di equazione $3x - 2y = 5$;

(b) La rotazione ρ di angolo $-\frac{\pi}{6}$ intorno al punto $\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$.

Soluzione 1

(a) Poiché ℓ passa per $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, basta traslare di $-v$, applicare la riflessione σ_0 rispetto a $3x - 2y = 0$ e traslare di v. Ora

$$\sigma_0 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{3x-2y}{4+9} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

da cui

$$\sigma \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = v + \sigma_0 \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - v \right) = \begin{pmatrix} -5 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{10}{13} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\rho \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} - 1 \\ 3\sqrt{3} - 4 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2 Determinare l'equazione della conica descritta:

(a) L'ellisse di fuochi $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ e parametro $2k = 12$;

(b) L'iperbole di fuochi $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$ e parametro $2k = 8$;

(c) La parabola di fuoco $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ e direttrice $5x - 2y + 1 = 0$.

Soluzione 2

(a) Sviluppando l'equazione

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-5)^2} = 12$$

si ottiene alla fine

$$380x^2 + 336xy + 432y^2 - 292x + 1560y - 7009 = 0$$

(b) Sviluppando l'equazione

$$\left| \sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} - \sqrt{(x+3)^2 + (y-7)^2} \right| = 8$$

si ottiene alla fine

$$156x^2 + 320xy - 804x + 160y + 1159 = 0$$

(c) Sviluppando l'equazione

$$\sqrt{(x+4)^2 + (y-3)^2} = \frac{|5x - 2y + 1|}{\sqrt{25+4}}$$

si ottiene alla fine

$$4x^2 + 20xy + 25y^2 + 222x - 170y + 724 = 0$$

Esercizio 3 Classificare a meno di trasformazioni affini la conica (anche se degenere) definita dall'equazione assegnata, discutendo rispetto a k quando presente:

1. $x^2 + 2xy - y^2 + 2x - \sqrt{3} = 0$
2. $2x^2 - xy - 3y^2 - 5x + 10y - 3 = 0$
3. $5x^2 - 4xy + 7y^2 + 4x - 3y - \sqrt{11} = 0$
4. $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 4x - 5y - 19 = 0$
5. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2y = 0$
6. $x^2 - 2xy - 2x + 1 = 0$
7. $9x^2 + 6xy + y^2 - \sqrt{10}x + 3\sqrt{10}y = 0$
8. $3x^2 - 6xy + 6y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$
9. $x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x - 5y + \sqrt{5} = 0$
10. $4x^2 - 5xy + 6y^2 - 2x - y + 22 = 0$
11. $x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$
12. $2x^2 - 2xy + y^2 + 2y + 1 = 0$
13. $5x^2 - 4xy + y^2 + 2y + 4\sqrt{2} = 0$
14. $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$
15. $xy + x - 3y + 4 = 0$
16. $x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 7 = 0$
17. $3x^2 + 6xy + 5y^2 - 2x - 4y - 2 = 0$
18. $3x^2 - 5xy + 2y^2 - 2x + 6y - 1 = 0$
19. $2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y + 1 = 0$
20. $x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 - 4x + 2y + 2 = 0$
21. $23x^2 - 8xy + 17y^2 - 75 = 0$
22. $2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + 6y + 5 = 0$
23. $x^2 + 4xy + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$

24. $4x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 4y = 0$
25. $4x^2 - 3y^2 + 8x + 12y + 4 = 0$
26. $x^2 - \sqrt{2}xy + 4y^2 + \sqrt{5} = 0$
27. $2x^2 + 6xy + 5y^2 + 4x + 10y + 10 = 0$
28. $6xy + 3y^2 - 2x + 2y + 9 = 0$
29. $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20x - 40y = 0$
30. $37x^2 - 18xy + 13y^2 + 92x - 44y + 28 = 0$
31. $7x^2 - 6xy - y^2 + 20x - 4y + 14 = 0$
32. $x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2 = 0$
33. $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 10x + 6y - k = 0$
34. $x^2 + kxy - 3y^2 + 2x + y - 1 = 0$
35. $kx^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 5 = 0$
36. $x^2 - 2xy + 2ky^2 + 2kx + 2y + 1 = 0$
37. $(k+1)x^2 + (k-1)y^2 + 2kx + 2y - 1 = 0$
38. $kx^2 + 2\sqrt{k}xy + 3y^2 + 2\sqrt{k}x + k = 0$
39. $x^2 - 2kxy + 4y^2 - 4x + 6y + \frac{13}{3} = 0$

Soluzione 3

1. Iperbole
2. Due rette incidenti: $(2x - 3y + 1)(x + y - 3) = 0$
3. Ellisse
4. Parabola
5. Parabola

6. Iperbole
7. Parabola
8. Ellisse
9. Iperbole
10. $\emptyset$
11. Due rette parallele: $(x + y)(x + y + 1) = 0$
12. Ellisse
13. $\emptyset$
14. Ellisse
15. Iperbole
16. Parabola
17. Ellisse
18. Iperbole
19. Ellisse
20. Parabola
21. Ellisse
22. Due rette incidenti: $(2x - y - 5)(x - y - 1) = 0$
23. Iperbole
24. Ellisse
25. Iperbole
26. Insieme vuoto
27. Ellisse
28. Iperbole

29. Ellisse

30. Ellisse

31. Iperbole

32. Parabola

33. Ellisse per $k > -5$, un punto per $k = -5$, vuoto per $k < -5$

34. Sempre un'iperbole

35. Iperbole per $k < 4$, vuoto per $k \geqslant 4$, infatti per $k = 4$ viene $(2x+y)^2 - 2(2x+y) + 5 = (2x+y-1)^2 + 4$

36. Iperbole per $k < -1$, due rette incidenti $x + \left(-1 \pm \sqrt{3}\right) y - 1 = 0$ per $k = -1$, iperbole per $-1 < k < \frac{1}{2}$, parabola per $k = \frac{1}{2}$, ellisse per $k > \frac{1}{2}$

37. Due rette incidenti per $k = 0$, parabola per $k = \pm 1$, iperbole per $0 < |k| < 1$, ellisse per $|k| > 1$

38. Non definita per $k < 0$, una retta per $k = 0$, un punto per $k = \frac{3}{2}$, ellisse per $0 < k < \frac{3}{2}$, insieme vuoto per $k > \frac{3}{2}$

39. $\emptyset$ per $1 < k < \frac{23}{13}$; un per $k = 1$ e $k = \frac{23}{13}$; ellisse per $-2 < k < 1$ e per $\frac{23}{13} < k < 2$; parabola per $k = \pm 2$; iperbole per $|k| > 2$

Esercizio 4 Verificare che la conica affine $\mathcal{C}$ di equazione $8x^2 - 12xy + 17y^2 + 4x + 12y + 4 = 0$ è un'ellisse. Determinare una trasformazione affine f di $\mathbb{R}^2$ che trasformi $\mathcal{C}$ nell'ellisse di equazione $x^2 + y^2 = 1$, e una isometria g di $\mathbb{R}^2$ che trasformi $\mathcal{C}$ in un'ellisse di equazione $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con $a > b > 0$, determinando a e b.

Soluzione 4 $(2x + y + 2)^2 + (2x - 4y - 1)^2 = 1$;

$$\begin{cases} X = \frac{2x+y+2}{\sqrt{5}} \\ Y = \frac{2x-4y-1}{2\sqrt{5}} \end{cases} \qquad a = \frac{1}{\sqrt{5}},\ b = \frac{1}{2\sqrt{5}}$$

Esercizio 5 Stabilire se la relazione R sull'insieme X goda delle proprietà riflessiva, simmetrica, antisimmetrica o transitiva:

(a) $X = \mathbb{N}$ con nRm se $|n| = |m|$

(b) $X = \mathbb{N}$ con nRm se $|n| \geqslant |m|$

(c) $X = \mathbb{N}$ con nRm se $|n| < |m|$

(d) $X =$ la popolazione mondiale con aRb se a è un discendente di b

(e) $X =$ la popolazione mondiale con aRb se a è un consanguineo di b

(f) $X =$ gli italiani che hanno un telefonino (e uno solo) con aRb se il prefisso del numero di telefonino di a coincide con quello di b

(g) X come in (f) con aRb se il numero di telefonino di a, pensato come numero di 10 cifre, è minore o uguale del numero di telefonino di b

(h) $X =$ le cifre da 0 a 9 e $d(n) =$ l'insieme dei trattini con cui si scrive la cifra n sul quadrante di un orologio digitale, con nRm se $d(n) \subseteq d(m)$

(i) X e d come in h con nRm se $d(n)$ ha almeno tanti elementi quanti $d(m)$

(j) X e d come in h con nRm se $d(n)$ ha tanti elementi quanti $d(m)$

Soluzione 5

(a) riflessiva, simmetrica, transitiva

(b) riflessiva, transitiva

(c) transitiva

(d) riflessiva, antisimmetrica, transitiva

(e) riflessiva, simmetrica

(f) riflessiva, simmetrica, transitiva

(g) riflessiva, antisimmetrica, transitiva

(h) riflessiva, antisimmetrica, transitiva

(i) riflessiva, transitiva

(j) riflessiva, simmetrica, transitiva

Esercizio 6 Dimostrare che la bigezione canonica $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{C}^2$ induce una mappa $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Soluzione 6 Lo 0 di $\mathbb{R}^4$ corrisponde allo 0 di $\mathbb{C}^2$, e due elementi non nulli e proporzionali di $\mathbb{R}^4$ come vettori reali corrispondono a due elementi non nulli e proporzionali di $\mathbb{C}^2$ come vettori complessi

Esercizio 7 Costruire esplicitamente una corrispondenza biunivoca tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e l'insieme $\mathbb{R}/_\sim$ dove $x \sim y$ se $y - x \in \mathbb{Z}$.

Soluzione 7 Detto ℓ il sottoinsieme di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dato dalle classi di equivalenza di $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $y \neq 0$ si considera la bigezione $\varphi : \ell \to (0,1)$ data dalla composizione

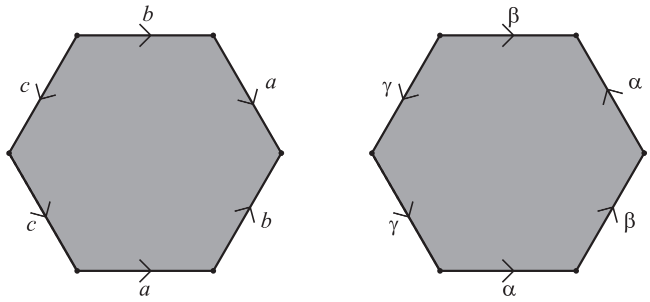
$$\ell \xrightarrow{\varphi_1} \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi_2} (-1,1) \xrightarrow{\varphi_3} (0,1)$$

con $\varphi_1\left(\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]\right) = \frac{x}{y}$, $\varphi_2(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ e $\varphi_3(s) = \frac{1}{2}(s+1)$. Se estende poi φ a una mappa $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to [0,1)$ mandando l'unico punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \ell$ in 0. Componendo tale mappa con l'inclusione di $[0,1) \to \mathbb{R}$ e con il passaggio al quoziente $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/_\sim$ si ottiene una bigezione

Esercizio 8 Descrivere un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ restringendo al quale la relazione di equivalenza che definisce $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si ottenga la consueta descrizione del nastro di Möbius.

Soluzione 8 Preso $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1^1 + x_2^2 = 1, \ x_2 \geq 0, |x_3| \leqslant 1\}$ si ha che Q si identifica in modo naturale al quadrato $[-1,1] \times [-1,1]$ tramite la mappa $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3)$, e la relazione di equivalenza che definisce $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ristretta a Q identifica tra loro i due lati $-1 \times [-1,1]$ e $\{+1\} \times [-1,1]$, con $(-1,t)$ identificato a $(+1,-t)$, dunque si ottiene la consueta descrizione del nastro di Möbius

Esercizio 9 Prendere due esagoni ed eseguire le identificazioni tra coppie di lati del primo esagono come suggerito dalle frecce e dalle etichette a, b, c nella parte sinistra della seguente figura, nonché le identificazioni tra coppie di lati del secondo esagono come suggerito dalle frecce e dalle etichette α, β, γ nella parte destra della seguente figura:



Provare che le due superfici risultanti sono in realtà la stessa.

Esercizio 10 Descrivere il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito dall'equazione

$$x^3 + y^3 - x^2 y - xy^2 - x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0$$

e i suoi punti all'infinito.

Soluzione 10 $(x - y + 1)(x^2 - y^2 - 1) = 0$

Esercizio 11 Esibire un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^2$ definito da un'equazione di terzo grado, che abbia tre punti distinti all'infinito e che non contenga alcuna retta.

Soluzione 11 $xy(x + y) = 1$

Esercizio 12 Determinare i punti all'infinito dell'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \ \left(x_1 + x_2 - (x_1 + x_2)^2\right) \cdot (x_1 x_2 + 1) \cdot \left(x_1 - \sqrt{\pi}\right) \cdot \left(x_1^2 + 17x_2\right) = 0\right\}.$$

Esercizio 13 Descrivere i punti all'infinito dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$ definiti dalle equazioni $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = z^2$.

Soluzione 13 Il primo insieme (cilindro) ha un solo punto all'infinito, dato dalla direzione della retta verticale (asse del cilindro). Il secondo insieme (cono) ha come punti all'infinito le classi di equivalenza dei vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$ con $x^2 + y^2 = 1$, dunque un insieme che si identifica in modo naturale a una circonferenza

Esercizio 14 Determinare tutti i punti di intersezione del luogo

$$\{[t+2:t+4:2t+7]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{R}):\ t\in\mathbb{R}\}$$

con l'insieme dei punti all'infinito del luogo $\mathcal{Q}$ in $\mathbb{R}^3$ di equazione

$$3x^2-xy+2yz-6z^2-\sqrt{7}x+11y-e^{\pi}=0.$$

Soluzione 14 L'insieme dei punti all'infinito di $\mathcal{Q}$ ha equazione $3x^2-xy+2yz-6z^2=0$. Sostituendo $[t+2:t+4:2t+7]$ si ottiene l'equazione $3t^3+22t+39=0$, da cui $t=-3$ e $t=-\frac{13}{3}$, onde i punti $[-1:1:1]$ e $[7:1:5]$

Esercizio 15 Determinare almeno un punto di intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tra gli insiemi

$$\{[t-1:t^2-4:-t]:\ t\in\mathbb{R}\},$$
$$\{[1-3t^2:1+t:1+3t^2]:\ t\in\mathbb{R}\}.$$

Soluzione 15 $[1:0:-2]$

Esercizio 16 Sia $\ell\subset\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ una retta proiettiva. Provare che esistono $v_0,v_1\in\mathbb{R}^{n+1}$ tali che la funzione $f:\mathbb{P}^1(\mathbb{R})\to\ell$ data da

$$f([t_0:t_1])=[t_0v_0+t_1v_1]$$

è ben definita ed è una bigezione tra $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e ℓ.

Esercizio 17 Stabilire per quali $t\in\mathbb{R}$ il punto $[t-4:1-4t:t^2+t+1]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ appartiene alla retta passante per $[4:-1:5]$ e $[3:3:-1]$.

Soluzione 17 det $\begin{pmatrix} 1 & 3 & t-4 \\ -1 & 3 & 1-4t \\ 5 & -1 & t^2+t+1 \end{pmatrix}=15(t^2-5t+6)$
dunque $t=2$ e $t=3$

Esercizio 18 Descrivere i cambiamenti di coordinate affini di $\mathbb{R}^n$ che lasciano fissi tutti i punti all'infinito.

Soluzione 18 Quelli del tipo $x'=kx+v$ con $k\in\mathbb{R}$ non nullo e $v\in\mathbb{R}^n$

Esercizio 19 Trovare l'equazione della parabola di vertice $(2,-1)$, passante per $(5,1)$ e avente punto all'infinito $[1:1]$.

Soluzione 19 La trasformazione $f_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y \end{pmatrix}$ manda le retta aventi punto all'infinito $[1:1]$, ovvero $x-y=$costante, nelle rette $y=$costante, che hanno punto all'infinito $[0:1]$, il quale è il punto all'infinito delle parabole $y=ax^2+bx+c$. Inoltre $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y-3 \\ y+1 \end{pmatrix}$ manda $(2,-1$ in $(0,0)$, dunque le parabole con vertice in $(2,-1)$ e punto all'infinito $[1:1]$ sono quelle del tipo $y+1=a(x-y-3)^2$. Imponendo il passaggio per $(5,1)$ si ottiene $a=2$, ovvero l'equazione $2x^2-4xy+2y^2-12x+11y+17=0$.

Esercizio 20 Trovare l'equazione dell'iperbole con punti all'infinito $[1:2]$ e $[-1:3]$, centro $(4,-5)$ e passante per $(5,1)$.

Soluzione 20 La trasformazione $f_0\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2x-y3x+y$ manda le rette aventi i punti all'infinito $[1:2]$ e $[-1:3]$ nelle rette parallele agli assi coordinati, dunque le iperboli aventi i punti all'infinito $[1:2]$ e $[-1:3]$ in quelle con asintoti paralleli agli assi coordinati. Inoltre $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y-13 \\ 3x+y-7 \end{pmatrix}$ manda $(4,-5)$ nell'origine, dunque l'iperbole cercata ha equazione $(2x-y-13)(3x+y-7)=a$. Imponendo il passaggio per $(5,1)$ si ottiene $a=-36$, onde l'equazione $6x^2-xy-y^2-53x-6y+127=0$

Esercizio 21 Determinare i possibili tipi affini di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ definito da un'equazione $(x\ y\ 1)\cdot A\cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, con $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ simmetrica avente determinante nullo.

Soluzione 21 Le possibilità per gli autovalori di Q e A sono:
$++/++0$ dunque un punto
$+-/+-0$ dunque due rette incidenti
$+0/+0+$ vuoto
$+0/+00$ una retta doppia
$+0/+0-$ due rette parallele
$00/00+$ vuoto

$00/0 + -$ una retta
$00/000$ $\mathbb{R}^2$

Esercizio 22 Determinare il tipo affine della quadrica assegnata, discutendolo al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$ se presente:

(a) $2x^2 - y^2 + z^2 + 4xz + 2yz - 2x + 6y - 2z = 0$

(b) $x^2 + 3y^2 + 4xy - 2xz - 2yz - 4x - 3 = 0$

(c) $2x^2 + 4y^2 - z^2 + 6xy - 2xz + 4yz - 4y + 2z - 1 = 0$

(d) $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4yz + 6z = 0$

(e) $x^2 + y^2 - 4xz + 6yz + 2x + 4z = 0$

(f) $-x^2 + y^2 - 4xy + 6yz - 2x + 4z = 0$

(g) $x^2 + 2y^2 + 5z^2 + 2xy - 4yz - 4x + 2y = 0$

(h) $x^2 - y^2 - 5z^2 - 2xy + 4xz + 2y - 4 = 0$

(i) $x^2 + 3y^2 - 3z^2 + 4xy - 2xz - 2x - 2y + 1 = 0$

(j) $2x^2 + y^2 + 5z^2 + 2xy + 2xz - 2yz - 2y = 0$

(k) $y^2 + 3z^2 + xy + 3xz + 4yz + y = 0$

(l) $-xy + 2xz + yz + x + 2 = 0$

(m) $x^2 + 5y^2 + (k^2 + 9)z^2 + 2xy - 2kxz + 2kyz - 1 = 0$

(n) $x^2 + (k^2 + 1)y^2 + (k^2 + 2)z^2 - 2kxy + 2xz - 4kyz - 1 = 0$

(o) $x^2 + (k^2 - 1)y^2 - k^2z^2 + 2kxy - 2kyz - 4x - 4ky - 2z + 4 = 0$

(p) $x^2 + 2y^2 + (k^2 - 1)z^2 + 2xy + 2kyz - 2x - 2y + 1 - k = 0$

(q) $x^2 + (k^2 + k)y^2 + (k + 1)z^2 - 2kxy + 2kyz - 4x + 4ky + 2kz + k^2 + 3 = 0$

(r) $x^2 + (k^2 + k)y^2 + z^2 + 2kxy + 2kyz + 4x + 4ky - 2z + 4 - 2k = 0$

Soluzione 22

(a) Paraboloide iperbolico

(b) Paraboloide iperbolico

(c) Iperboloide a una falda

(d) Iperboloide a due falde

(e) Iperboloide a due falde

(f) Iperboloide a una falda

(g) Ellissoide

(h) Iperboloide a una falda

(i) Insieme vuoto

(j) Paraboloide ellittico

(k) Paraboloide iperbolico

(l) Iperboloide a due falde

(m) Ellissoide per $|k| > 3$, degenere (cilindro) per $|k| = 3$, iperboloide a una falda per $|k| < 3$

(n) Sempre ellissoide

(o) Sempre paraboloide iperbolico

(p) Iperboloide a una falda per $k > 0$, iperboloide a due falde per $k < 0$, degenere per $k = 0$

(q) Ellissoide per $k > 0$, iperboloide a una falda per $k < 0$, degenere per $k = 0$

(r) Iperboloide due falde per $k < \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right)$ e per $1 < k < \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$, iperboloide a una falda per $\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{3}\right) < k < 0$ e per $1 < k < \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{3}\right)$, ellissoide per $0 < k < 1$, paraboloide ellittico per $k = 1$, degenere (cono) per $k = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}\right)$ e degenere (cilindro) per $k = 0$

Esercizio 23 Determinare il tipo affine della quadrica Q di equazione $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 + 2x_2 = 2$. Identificato $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con l'insieme dei punti all'infinito di $\mathbb{R}^3$, individuare l'intersezione di $\{[3-t : 2t-5 : 2t-3] : \ t \in \mathbb{R}\}$ con l'insieme dei punti all'infinito di Q.

Soluzione 23 Iperboloide iperbolico (a una falda); $[1 : -1 : 1]$ e $[-3 : 7 : 9]$ ottenuti per $t = 2$ e $t = -6$