Eserciziî di Geometria

(Carlo Petronio)

Foglio del 27/3/2015

Esercizio 1 Determinare gli autovalori dell'applicazione lineare f assegnata o dell'applicazione lineare associata alla matrice A assegnata:

(a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1+i & -\frac{1}{5}(7+i) \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $f : V \to V, \quad V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\},$
$$f(x) = \begin{pmatrix} -3x_1 - 8x_2 + 2x_3 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 - 8x_3 \end{pmatrix}$$

(h) $f : V \to V, \quad V = \mathbb{R}_{\leq 1}[t], \quad f(p(t)) = p(3) + p(-2) \cdot t$

(i) $f : V \to V, \quad V = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] : \ p(1) = 0\}$,
$f(p(t)) = (t-1) \cdot p'(t) + (t^2 - 1) \cdot p(-2)$

Soluzione 1

(e) $3, \ \pm 1$

(f) $2, \ \pm\sqrt{5}$

(g) $1, \ -7$ con autovettori $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

(h) $\frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{21}\right)$

(i) $3 \pm \sqrt{10}$

Esercizio 2 Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$, sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale tale che $f(W) \subseteq W$. Sia $g : W \to W$ l'applicazione lineare data da $g(w) = f(w)$ per ogni $w \in W$. Provare che il polinomio caratteristico di f è multiplo di quello di g.

Esercizio 3 Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Determinare quali $\lambda \in \mathbb{K}$ possono essere autovalori di una tale f, e descrivere tutte le f siffatte che sono diagonalizzabili.

Esercizio 4 Determinare per quali numeri $n \in \mathbb{N}$ si ha che qualsiasi matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ha almeno un autovalore reale.

Esercizio 5 Stabilire che legame intercorre tra la diagonalizzabilità su $\mathbb{K}$ di $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e della sua trasposta ${}^{t}A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Esercizio 6 Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che il polinomio caratteristico $p_A(t)$ ha n radici reali (contate con la molteplicità), e diagonalizzabile come matrice complessa, cioè tale che esiste $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ invertibile tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ è diagonale. Provare che A è diagonalizzabile come matrice reale.

Soluzione 6 Risolverlo in due modi: provando che le molteplicità geometriche reali e complesse sono uguali perché si calcolano con il teorema degli orlati, e provando che se $X+iY$ diagonalizza, ovvero $A\cdot(X+iY) = (X+iY)\cdot D$, si ha $A\cdot X = X\cdot D$ e $A\cdot Y = Y\cdot D$, dunque $A\cdot(X+tY) = (X+tY)\cdot D$ per ogni t reale, e non si può avere $\det(X+tY) = 0$ per ogni t reale altrimenti si avrebbe anche per $t = i$.

Esercizio 7 Sia $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con tutti i coefficienti positivi. Provare che gli autovalori di A sono distinti e che A ha un autovettore con le coordinate concordi e uno con le coordinate discordi.

Soluzione 7 Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ allora $p_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad-bc)$ ha $\Delta = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc = (a-d)^2 + 4bc > 0$; siano $\lambda_\pm = \frac{a+d}{2} \pm e$ con $e > 0$; supponiamo $d \geqslant a$; allora per v_+ abbiamo $ax + by = \left(\frac{a+d}{2} + e\right)x$, dunque $by = \left(\frac{d-a}{2} + e\right)x$, da cui x e y sono concordi, mentre per v_- abbiamo $cx + dy = \left(\frac{a+d}{2} - e\right)y$ da cui $cx = \left(\frac{a-d}{2} - e\right)y$, pertanto x e y sono discordi; se $a \geqslant d$ si procede allo stesso modo esaminando la prima coordinata di v_- e la seconda di v_+

Esercizio 8 Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 20 & 5 & 92 \\ -30 & -7 & -144 \\ -3 & -1 & -11 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.

Soluzione 8

$\lambda_1 = 1, \quad v_1 = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix};$

$\lambda_2 = -1, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix};$

$\lambda_3 = 2, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 9 Discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$ della matrice assegnata, al variare del parametro k quando presente:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 2k-1 & 2-k \\ 2k+1 & -k \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 2-k & 3k-2 \\ 1 & 2k-1 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(l) $\begin{pmatrix} 2 & 2(k-1) & 1-k \\ -k-4 & 2k-9 & 4-k \\ -2(k+4) & 2(k-7) & 6-k \end{pmatrix}$

(m) $\begin{pmatrix} k^2 & 2(1-k) & k-1 \\ k+1 & -k-2 & 1 \\ 2(k+1) & -4(k+1) & k+2 \end{pmatrix}$

(n) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3k \\ 1 & 0 & 3k & 1 \end{pmatrix}$

Soluzione 9

(c) Ha autovalori 0 semplice 2 doppio e non è diagonalizzabile

(g) $(t^2+3)(t^2+9)$

(h) $(t+2)^3(t-3)^2$ e m.g.$(-2) = 2$

(i) Gli autovalori sono -2 e $k+1$, dunque è diagonalizzabile per $k \neq -3$ con autovettori $\begin{pmatrix} k-2 \\ 2k+1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, che per $k = -3$ sono linearmente dipendenti

(j) Gli autovalori sono $2k$ e $1-k$

(k) Gli autovalori sono 1 e $1 \pm \sqrt{2(k-1)}$

(l) Gli autovalori sono 2, -1, $k-2$

(m) Gli autovalori sono k^2 e $\pm k$

Esercizio 10 Trovare una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza $A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -1 & 9 & 5 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Soluzione 10
$p_A(t) = t^3 - 11t^2 - 47t + 213;$
$p_A(3) = 27 - 99 - 141 + 213 = 0;$
$p_A(t) = (t-3)(t^2 - 8t - 71);$
$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_{2,3} = 4 \pm \sqrt{87};$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad v_{2,3} = \begin{pmatrix} 53 + \mp 6\sqrt{87} \\ 11 \pm \sqrt{87} \\ 17 \end{pmatrix}$$

Esercizio 11 Trovare gli autovalori di $\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 12 & -6 & 6\sqrt{3} \\ -6 & -9 & -7\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & -7\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$ e una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.

Soluzione 11

$$\lambda_1 = 3, \quad v_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = -2, \quad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_3 = 0, \quad v_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Esercizio 12 Determinare i segni degli autovalori della matrice assegnata:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

Esercizio 13 Provare che la funzione f assegnata ha un punto critico nell'origine 0, determinare la matrice hessiana di f in 0 e stabilire se 0 sia un punto di massimo o di minimo relativo per f:

(a) $f(x, y) = x^2 \cdot \cos(xy) + 2y^2 - 3xy$

(b) $f(x, y) = x \cdot \ln(1 + y) + 3 \sin^2 y + x^2$

(c) $f(x, y) = e^{xy} \cdot \cos(2x - y) - 2xy$

Soluzione 13

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$; né di massimo né di minimo relativo

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$; di minimo relativo

(c) $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; di massimo relativo

Esercizio 14 Stabilire se la matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ assegnata sia normale e in caso affermativo determinare i suoi autovettori e una base ortonormale di $\mathbb{C}^n$ che la diagonalizza.

(a) $\begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1-5i & -6i \\ 3i & 1+4i \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ -7-i & 5+5i \end{pmatrix}$

Soluzione 14

(a) Non è normale

(b) $\lambda_1 = 8 - 6i, \quad v_2 = 6 - 8i; \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) Non è normale

(d) $\lambda_{1,2} = 1 \pm i, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$

(e) $\lambda_1 = 10, \quad \lambda_2 = 10i, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 4i - 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 3 - 4i \\ 5 \end{pmatrix}$

Esercizio 15 Verificare che la matrice assegnata è unitaria.

(a) $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} & -i \\ -i\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ i & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 - i & \sqrt{2} \cdot (i - 1) & i - 3 \\ \sqrt{2} \cdot (i - 1) & 2 \cdot (1 + i) & -\sqrt{2} \cdot (1 + i) \\ 3 - i & \sqrt{2} \cdot (1 + i) & 1 - i \end{pmatrix}$

Esercizio 16 Determinare i segni degli autovalori della matrice assegnata:

(a) $\begin{pmatrix} -3 & 1 + 4i \\ 1 - 4i & -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 0 & 1 + i \\ -1 & 1 - i & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio 17 Determinare la forma canonica, su $\mathbb{R}$ quando ha senso e altrimenti su $\mathbb{C}$, della matrice assegnata:

(a) $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 2 & 1+3i \\ 1-3i & -1 \end{pmatrix}$

(e) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} -i & i+\sqrt{3} \\ i-\sqrt{3} & 2i \end{pmatrix}$

Soluzione 17

(a) Ha determinante 1, dunque è una rotazione di angolo avente coseno $\frac{1}{2}(\mathrm{tr}(A)-1)$

(b) Autovalori $5, 2, -1$ con autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

(c) $\pm\sqrt{14}$

(d) Autovalori $4, -3$ con autovettori $\begin{pmatrix} 1+3i \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+3i \\ -5 \end{pmatrix}$

(e) Autovettori $\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$ con autovettori $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

(f) Autovettori $3i, -2i$ con autovettori $\begin{pmatrix} 1+i\sqrt{3} \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i\sqrt{3}-1 \\ 1 \end{pmatrix}$