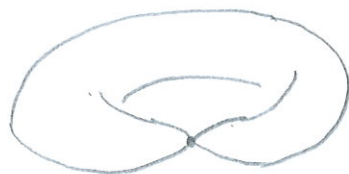


Esercizi

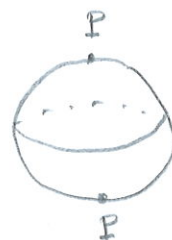
① Calcolare $H_*(X; G)$ dove

$$X = S^1 \times S^1 / S^1 \times \{pt\}.$$

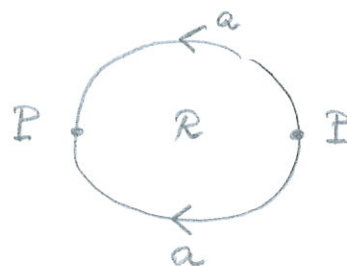
Soluzione: $X \simeq$



$\simeq$



$\cong$



$$H_j(X; G) = \begin{cases} G & j=0,1,2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \iff \begin{cases} \partial a = 0 \\ \partial R = 0 \end{cases} \iff$$

② Calcolare $H_*(Y; \mathbb{Z})$ dove

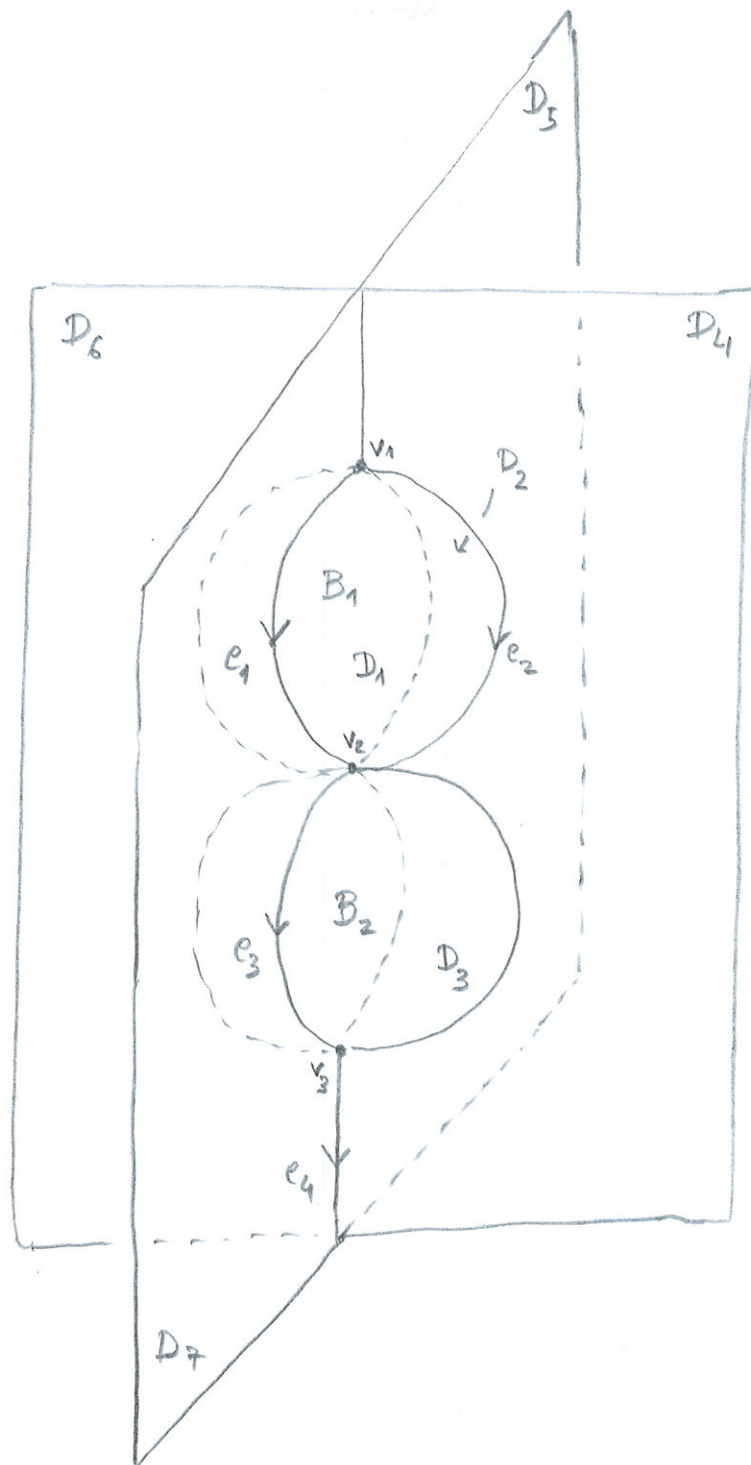
$$S^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

$$X = \{\infty\} \cup \{(z,t) : (1-|t|)^2 + |z|^2 \leq 1\} \cup \{(z,t) : \operatorname{Re}(z) \cdot \operatorname{Im}(z) = 0\} \subset S^3$$

$$Y = X / \begin{matrix} (z,t) \sim (s,w) \text{ se} \\ s=t>0, (1-t)^2 + |z|^2 = 1, z^2 = w^2 \\ s=t<0, (1+t)^2 + |z|^2 = 1, z^4 = w^4 \end{matrix}$$

Soluzione: La parte al finito di X consiste dei due piani coordinati verticali e delle due palle di raggio 1 e centri $(0,0,\pm 1)$. Inoltre Y si ricava da X tramite l'azione delle rotazioni di angolo π intorno all'asse verticale sul bordo delle palle superiori, e di angolo $\pi/2$ sul bordo di

quella inferiore. Allora γ ha la seguente naturale presentazione come complesso cellulare:



$$\begin{aligned} \partial_1 : e_1 &\mapsto v_2 - v_1 \\ e_2 &\mapsto v_2 - v_1 \\ e_3 &\mapsto v_3 - v_2 \\ e_4 &\mapsto v_1 - v_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2 : D_1 &\mapsto e_1 - e_2 \\ D_2 &\mapsto e_2 - e_1 \\ D_3 &\mapsto 0 \\ D_4 &\mapsto e_2 + e_3 + e_4 \\ D_5 &\mapsto e_1 + e_3 + e_4 \\ D_6 &\mapsto -e_2 - e_3 - e_4 \\ D_7 &\mapsto -e_1 - e_3 - e_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_3 : B_1 &\mapsto 2D_1 + 2D_2 \\ B_2 &\mapsto 4D_3 \end{aligned}$$

uso le relazioni

$$\alpha - (\beta_j - \beta_{j+1}) \quad j = 0, \dots, m-2$$

per ricondurci a $\langle \alpha \rangle$ / ultime
relazione

e ora l'ultima relazione è

$$\begin{aligned} \alpha - (\beta_{m-1} - \beta_0) &= \alpha + (\beta_0 - \beta_1) + (\beta_1 - \beta_2) + \dots + (\beta_{m-2} - \beta_{m-1}) \\ &= m \cdot \alpha. \end{aligned}$$

④ Calcolare $H_*(\Sigma_g, A)$ con $\# A = m$.

Soluzione:

$$\begin{array}{ccccccc} H_2(A) & \rightarrow & H_2(\Sigma_g) & \rightarrow & H_2(\Sigma_g, A) & \rightarrow & H_1(A) \rightarrow H_1(\Sigma_g) = \mathbb{Z}^{2g} \\ \parallel & & \parallel & & & & \parallel \\ 0 & & \mathbb{Z} & & & & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow H_2(\Sigma_g, A) = \mathbb{Z}$$

∇ splitte perché $\tilde{H}_0(A)$ è libero

$$\Rightarrow H_1(\Sigma_g, A) = \mathbb{Z}^{2g+m-1}$$

$$\downarrow$$

$$H_n(\Sigma_g, A)$$

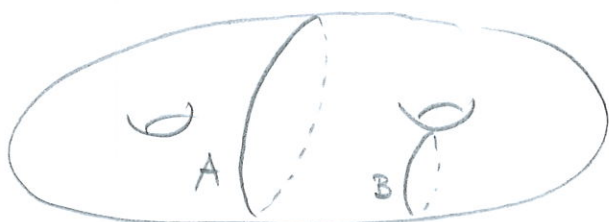
$$\downarrow p$$

$$\tilde{H}_0(A) = \mathbb{Z}^{m-1}$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{H}_0(\Sigma_g) = 0$$

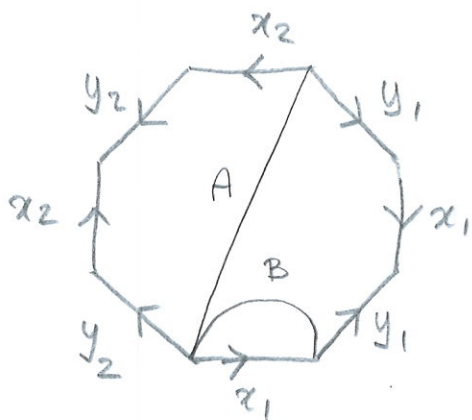
⑤ Calcolare $H_*(\Sigma_2, A)$ e $H_*(\Sigma_2, B)$ con



Soluzione: per $C \in \{A, B\}$ ho

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_2(C) & \rightarrow & H_2(\Sigma_2) & \rightarrow & H_2(\Sigma_2, C) & \rightarrow & H_1(C) \xrightarrow{j_*} H_1(\Sigma_2) \rightarrow H_1(\Sigma_2, C) \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 0 & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z} & & \mathbb{Z}^4 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & \tilde{H}_0(C) = 0
 \end{array}$$

dunque tutto dipende da j_* :



$$\Rightarrow j_* = 0 \text{ per } C = A$$

$$j_*(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ per } C = B$$

$$\begin{array}{l}
 \Rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_2(\Sigma_2, A) \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow 0 \\
 0 \rightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow H_1(\Sigma_2, A) \rightarrow 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 H_2(\Sigma_2, A) = \mathbb{Z}^2 \\
 H_1(\Sigma_2, A) = \mathbb{Z}^4
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_2(\Sigma_2, B) \rightarrow 0 \\
 0 \rightarrow \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}^4 \rightarrow H_1(\Sigma_2, B) \rightarrow 0
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 H_2(\Sigma_2, B) = \mathbb{Z} \\
 H_1(\Sigma_2, B) = \mathbb{Z}^3
 \end{array}$$

⑥ Provar che se $\alpha, \beta \subset \Sigma_g$ sono curve semplici chiuse non separanti esiste $h \in \text{Aut}(\Sigma_g)$ con $h(\alpha) = \beta$.

Soluzione: se taglio Σ_g lungo α o β e otteco due D^2 trovo una superficie orientabile di caratteristica di Eulero $\chi(\Sigma_g) + 2 = 2(1-g) + 2 = 2(1-(g-1))$, dunque in entrambi i casi la superficie orientabile di genere $g-1$,

grazie al teorema di classificazione. Ora dato Σ_{g-1} ho dischi $\Delta_\alpha^{(1)}, \Delta_\alpha^{(2)}, \Delta_\beta^{(1)}, \Delta_\beta^{(2)}$ e posso trovare $f \in \text{Aut}(\Sigma_{g-1})$ t.c. $f(\Delta_\alpha^{(j)}) = \Delta_\beta^{(j)}$ (più una condizione ovvia su $\partial\Delta_\alpha^{(j)} \rightarrow \partial\Delta_\beta^{(j)}$ che non esplicito) e allora $f|_{\Sigma_{g-1} \setminus (\Delta_\alpha^{(1)} \cup \Delta_\alpha^{(2)})}$ induce la h voluta. (Le condizioni insipite $\bar{\epsilon}$ che reincollando $\partial\Delta_\alpha^{(1)}$ con $\partial\Delta_\alpha^{(2)}$ viene una h ben definita).

⑦ Calcolare $H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}; \mathbb{Z})$

Soluzione:

$$H_1(\mathbb{R}) \xrightarrow{\parallel 0} H_1(\mathbb{R}, \mathbb{Q}) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}_0(\mathbb{Q}) \xrightarrow{\parallel 0} \tilde{H}_0(\mathbb{R})$$

$$\left\{ \alpha \in \mathbb{Z}^{\mathbb{Q}} : \# \{q : \alpha(q) \neq 0\} < +\infty, \sum_{q \in \mathbb{Q}} \alpha(q) = 0 \right\}$$

= gruppo liberamente generato da

$$\hat{q} : x \mapsto \begin{cases} 1 & x = q \\ -1 & x = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

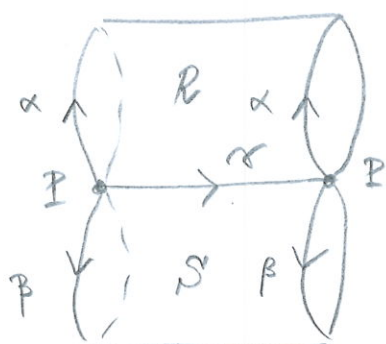
al variare di $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

⑧ Provare che ogni $f : \mathbb{P}^{2n}(\mathbb{R}) \hookrightarrow$ continue ha punti fissi, e che non è vero per $f : \mathbb{P}^{2n+1}(\mathbb{R}) \hookrightarrow$.

Soluzione: Sollevo a $\tilde{f}: S^{2n} \rightarrow S^{2n}$. Se $\tilde{f}(x)$ fosse sempre diverso da x e da $-x$ avrei $\tilde{f} \simeq -id$ e $\tilde{f} \simeq id$, ma $id \not\simeq -id$ su S^{2n} . Nel caso $2n+1$ si prende f indotta da $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \end{pmatrix}$

⑨ Calcolare $H_*(S^1 \times (S^1 \vee S^1))$.

Soluzione: Direttamente abbiamo



$$\partial\alpha = \partial\beta = \partial\gamma = \partial\delta = 0$$

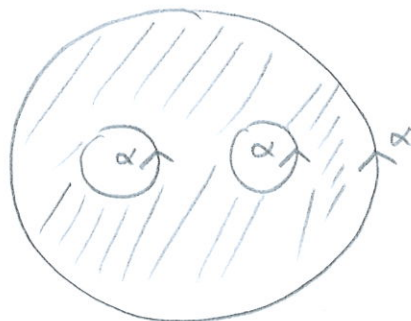
$$\partial R = \partial S = 0$$

$$\Rightarrow H_0 = \mathbb{Z}, H_1 = \mathbb{Z}^3, H_2 = \mathbb{Z}^2$$

Con Künneth abbiamo solo i $\otimes$ e niente Tor, e

	$H_0(S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z}^2$	$H_1(S^1 \vee S^1) = \mathbb{Z}^2$
$H_0(S^1) = \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$
$H_1(S^1) = \mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}^2$

⑩ Calcolare H_*



$$H_2(\mathbb{P}^3) \oplus H_2(\mathbb{P}^2) = 0$$

$$\downarrow$$

$$H_2(X)$$

$$\downarrow$$

$$H_1(\mathbb{P}^2) = \mathbb{Z}/2$$

$$\downarrow \quad \longleftarrow$$

$$H_1(\mathbb{P}^3) \oplus H_1(\mathbb{P}^3) = (\mathbb{Z}/2)^2$$

$$\downarrow$$

$$H_1(X)$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{H}_0(\mathbb{P}^2) = 0$$

$$H_2(X) = 0$$



questa è lo isomorfismo $1 \mapsto (1,1)$



$$H_1(X) = \mathbb{Z}/2$$

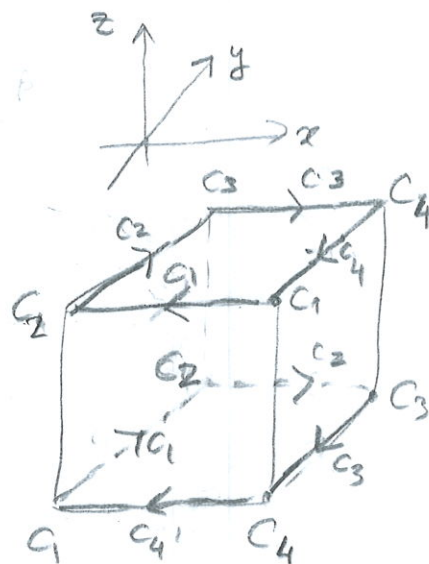
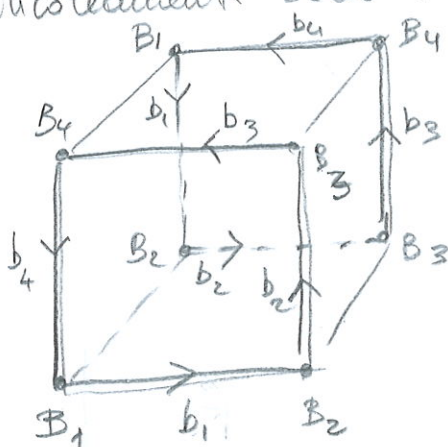
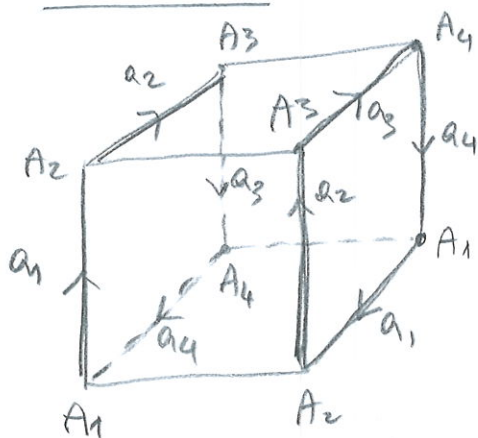
⑫ Calcolare $H_*(X)$ dove $X = [-1,1]^3 / \sim$

$$(1, y, z) \sim (-1, -y, z)$$

$$(x, -1, z) \sim (x, 1, -z)$$

$$(x, y, -1) \sim (-x, y, 1)$$

Soluzione: Gli incollamenti sono:



$$\Rightarrow A_1 = B_1 = C_1 = A_3 = B_3 = C_3 =: P$$

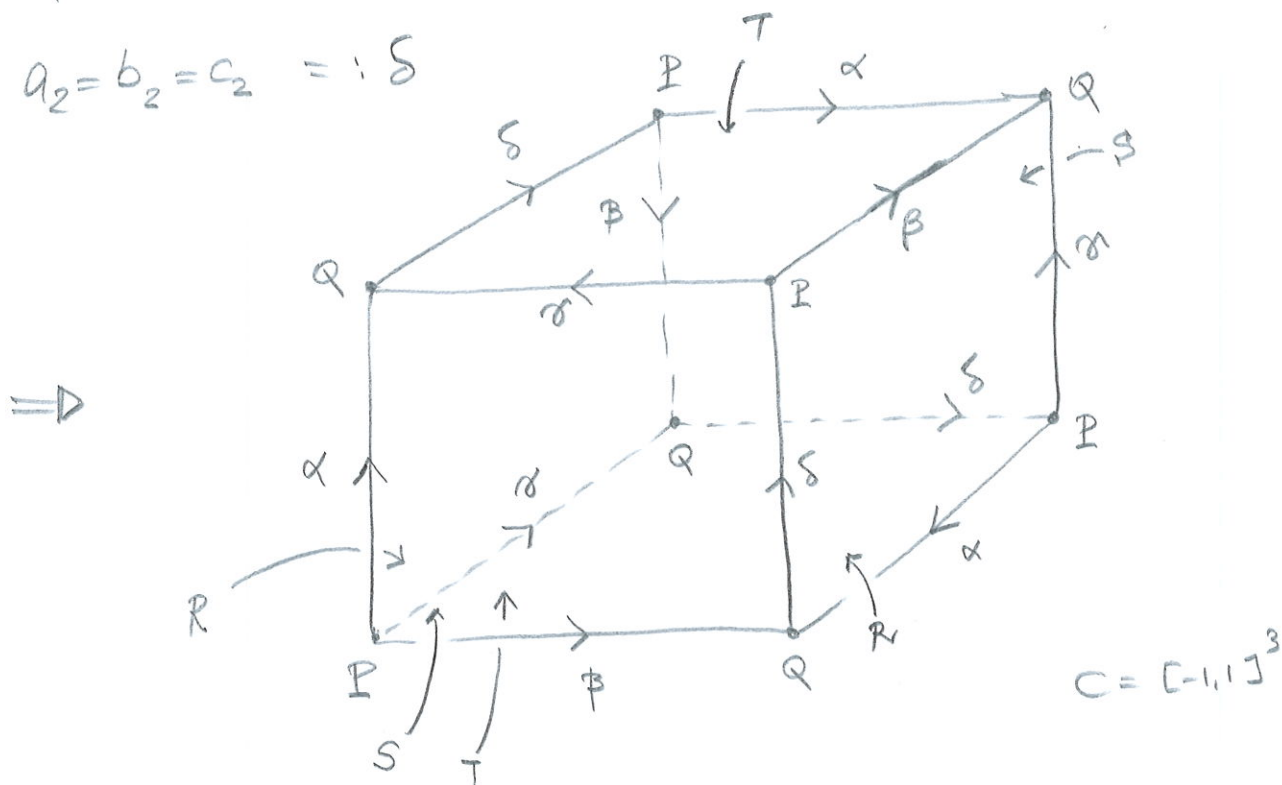
$$A_2 = B_2 = C_2 = A_4 = B_4 = C_4 =: Q$$

$$b_4 = -a_1 \quad c_3 = a_1 =: \alpha$$

$$c_4 = -b_1 \quad a_3 = b_1 =: \beta$$

$$a_4 = -c_1 \quad b_3 = c_1 =: \gamma$$

$$a_2 = b_2 = c_2 =: \delta$$



$$\partial \alpha = \partial \beta = \partial \gamma = Q - P \quad \partial \delta = P - Q$$

$$\partial R = \alpha + \delta + \beta - \gamma$$

$$\partial S = \beta + \delta + \gamma - \alpha$$

$$\partial T = \gamma + \delta + \alpha - \beta$$

$$\partial Q = 0$$

$$\Rightarrow H_0 = \mathbb{Z}$$

$$H_1 = \frac{\langle \alpha + \delta = a, \beta + \delta = b, \gamma + \delta = c \rangle}{a + b - c, b + c - a, c + a - b}$$

$$= \frac{\langle a, b \rangle}{2b, 2a} = \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$$

$$H_2 = 0$$

$$H_3 = \mathbb{Z}$$

(13) Calcolare $H_*(S^3/\mathbb{Q}_8)$ dove $S^3 = \{u \in \mathbb{H} : |u| = 1\}$
e $\mathbb{Q}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$. (Difficile.)