Esercizî di Algebra Lineare (Petronio 14/15)

27 novembre 2014

Esercizio 1. Determinare la segnatura della permutazione assegnata:

(a) $(4\ 3\ 1\ 2) \in \mathfrak{S}_4$

(b) $(4\ 1\ 5\ 2\ 3) \in \mathfrak{S}_5$

(c) $(3\ 6\ 1\ 5\ 2\ 4) \in \mathfrak{S}_6$

(d) $(5\ 4\ 1\ 7\ 2\ 3\ 6) \in \mathfrak{S}_7$

(e) $(7\ 5\ 2\ 8\ 1\ 4\ 3\ 6) \in \mathfrak{S}_8$

Esercizio 2. Calcolare il determinante della matrice assegnata:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1+t & -1+2t \\ 6+5t & 2-t \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} -1+t & 2 & -3 \\ 1+2t & 5 & -1 \\ -2 & 2-3t & 5 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 0 & t & -1 & 2 \\ 1-t & 2 & 3 & -6 \\ 2 & -2t & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 1+t \end{pmatrix}$

Esercizio 3. Data $A = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con determinante del valore dato, considerare la matrice B indicata e calcolare il determinante di B:

(a) $n = 2, \quad \det(A) = -3, \quad B = (3v_1 - 2v_2,\ -5v_1 + 4v_2)$

(b) $n = 3, \quad \det(A) = 5, \quad B = (v_2 - v_3,\ 2v_1 + v_3,\ -v_1 + 2v_2 + 3v_3)$

(c) $n = 4, \quad \det(A) = 6, \quad B = (v_3 - v_1,\ v_1 - 3v_4,\ 2v_2 + v_4,\ v_3 - 2v_4)$

Esercizio 4. Calcolare l'inversa della matrice assegnata:

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 8 & -5 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1+t & t-9 \\ 1-t & t \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 5. Risolvere il sistema lineare assegnato (ovvero **trovarne *tutte* le soluzioni**):

(a) $\begin{cases} 2x - y + 3z = 26 \\ -3x + 2y + 7z = 17 \\ 4x + 3y - z = 2 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 4x - 3y + 7z = 2 \\ -3x + 5y + z = -1 \\ 10x - 13y + 5z = 4 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} 7x - y + 2z = 4 \\ 2x + 3y - 5z = -3 \\ x - 10y + 17z = 12 \end{cases}$

Esercizio 6. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ stabilire quante sono le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{cases} (1-t)x + 2y - 2z = 1 \\ (1+t)x + 3y + z = t \\ 7x + 12y + 2tz = -1. \end{cases}$$

Esercizio 7. Per la matrice A e la sua sottomatrice B date, calcolare i determinanti di tutte le orlate di B in A:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -1 & 5 & 7 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = (7)$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ -5 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 & 4 \\ -3 & 5 & 7 & 6 \\ 2 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

Esercizio 8. Usando il teorema degli orlati calcolare il rango della matrice assegnata:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 9. Come può cambiare il rango di una matrice cambiandone un solo coefficiente? Fornire esempi di tutte le situazioni possibili.

Esercizio 10. Calcolare la dimensione del sottospazio affine E assegnato, trovandone una presentazione parametrica quando ne viene fornita una cartesiana, e viceversa:

(a) $E \subset \mathbb{R}^2, \quad E: \ 6x - 5y = 11$

(b) $E \subset \mathbb{R}^2, \quad E: \begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = 5 + 6t \end{cases}$

(c) $E \subset \mathbb{R}^3, \quad E: \begin{cases} 2x - 3y + 7z = 6 \\ -5x + y + 6z = 2 \end{cases}$

(d) $E \subset \mathbb{R}^3, \quad E: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = -5 + 7t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$

(e) $E \subset \mathbb{R}^3, \quad E:\ 5x - 12y + 10z = 2$

(f) $E \subset \mathbb{R}^3, \quad E: \begin{cases} x = 3 + 2t - 5s \\ y = 6 + 5t - 3s \\ z = -7 + 4t - 7s \end{cases}$

(g) $E \subset \mathbb{R}^3, \quad E: \begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - 2y + 5z = -1 \\ 7x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$

(h) $E \subset \mathbb{R}^3, \quad E: \begin{cases} 5x + 3y - 2z = 1 \\ 3x - 2y + 4z = -3 \\ x - 7y + 10z = 7 \end{cases}$

(i) $E \subset \mathbb{R}^3, \quad E: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -3 + 5t \\ z = 4 - 3t \end{cases}$

(j) $E \subset \mathbb{R}^3, \quad E: \begin{cases} x = 1 + t - 2s \\ y = 3 + 2t - 5s \\ z = 4 - 2t + 3s \end{cases}$

(k) $E \subset \mathbb{R}^3, \quad E: \begin{cases} x = -1 + t + s + 2u \\ y = 4 - 2t + 3s + u \\ z = 2 + 5t - 2s + 3u \end{cases}$

(l) $E \subset \mathbb{R}^4, \quad E: \begin{cases} 2x + 3y - 4z + 5w = 7 \\ 3x - 5y + 7z + 2w = -1 \end{cases}$

(m) $E \subset \mathbb{R}^4, \quad E: \begin{cases} 3x - 2y + 4z + w = -1 \\ 2x + 5y - 3z + 4w = 3 \\ 5x - 16y + 18z - 5w = -9 \end{cases}$

(n) $E \subset \mathbb{R}^4, \quad E: \begin{cases} 4x - y + 2z + w = 3 \\ 2x + 3y - 5z + 4w = 2 \\ 2x - 4y + 7z - 3w = 5 \end{cases}$

(o) $E \subset \mathbb{R}^4, \quad E: \begin{cases} 4x - y + 2z - 5w = 3 \\ 2x + y + 3z - 6w = 3 \\ -x + 5y + 2z - 4w = 4 \end{cases}$

(p) $E \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 + 5t \\ z = 3 + 4t \\ w = 3 - 7t \end{cases}$

(q) $E \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} x = -2 + t + 3s \\ y = 4 + 5t - 2s \\ z = -3 + 4t + 5s \\ w = 1 + 3t - s \end{cases}$

(r) $E \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} x = 3 + t - 2s + u \\ y = 2 + 3t + s - 5u \\ z = 4 - t + 3s + 4u \\ w = -1 + 4t + 7s - 2u \end{cases}$