Esercizî di Algebra Lineare (Petronio 14/15)

15 novembre 2014

Esercizio 1 Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^4 : \ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0\}$, provare che esiste una e una sola applicazione lineare $f : \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t] \to X$ tale che

$$f(1-2t^2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f(-2t+t^2) = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(-1+t+t^2) = \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dimostrare inoltre che f è bigettiva e calcolare $f(3 - t + t^2)$ e $f^{-1}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Esercizio 2 Al variare di $t \in \mathbb{R}$ determinare quante sono le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tali che

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2-t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Considerare in $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ le basi

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ data da $f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$ e il vettore $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Verificare la formula $[f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$.

Esercizio 4 Sia $f : V \to W$ è un'applicazione lineare tra spazi vettoriali di dimensione finita n. Provare che:

- Se esistono basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di W tali che la matrice $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ è invertibile, allora f è invertibile come applicazione lineare;
- Se f è invertibile come applicazione lineare allora per qualsiasi scelta di basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di W si ha che la matrice $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ è invertibile.

Esercizio 5 Nello spazio vettoriale V dato considerare le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ ed esibire le matrici di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$, verificando che sono l'una l'inversa dell'altra.

(a) $V = \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$

(b) $V = \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right),$

$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

(c) $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\},$
$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$

(d) $V = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t] : \ p(-1) = 0\},$
$\mathcal{B} = (1 + t, 1 - t^2), \quad \mathcal{B}' = (1 + 2t + t^2, 2 - t - 3t^2)$

Esercizio 6. Verificare la formula di cambiamento di base per le coordinate di un vettore nel caso dello spazio vettoriale $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 0\}$, del vettore $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e delle basi

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \right).$$

Esercizio 7. Verificare la formula di cambiamento di base per la matrice associata a un'applicazione lineare nel caso dell'applicazione

$$f : \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\} \to \{x \in \mathbb{R}^3 : \ x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

data da $f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 5x_3 - x_2 \\ 3x_1 + x_3 \end{pmatrix}$ rispetto alle basi

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \qquad \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Esercizio 8. Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -4x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 9. Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\}$ tale che

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 10. Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 4a_{1\,1} + 7a_{1\,2} & 5a_{1\,1} - 6a_{1\,2} \\ 4a_{2\,1} + 7a_{2\,2} & 5a_{2\,1} - 6a_{2\,2} \\ 4a_{3\,1} + 7a_{3\,2} & 5a_{3\,1} - 6a_{3\,2} \end{pmatrix}$$

per ogni $A \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

Esercizio 11. Determinare la base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che

$$[f_A]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} -2a_{1\,1} + 5a_{2\,1} & -2a_{1\,2} + 5a_{2\,2} & -2a_{1\,3} + 5a_{2\,3} \\ 3a_{1\,1} - 7a_{2\,1} & 3a_{1\,2} - 7a_{2\,2} & 3a_{1\,3} - 7a_{2\,3} \end{pmatrix}$$

per ogni $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Esercizio 12. In $\mathbb{R}^2$ considerare le basi

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare con $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ determinare $[f]^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}$.