Esercizî di Algebra Lineare (Petronio 14/15)

9 novembre 2014

Esercizio 1. Siano V e W spazî vettoriali di dimensione finita. Provare che se $\dim_{\mathbb{R}}(V) \geqslant \dim_{\mathbb{R}}(W)$ allora esistono applicazioni lineari $f : V \to W$ surgettive. Provare inoltre che se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare surgettiva allora esiste $g : W \to V$ lineare tale che $f \circ g = \mathrm{id}_W$.

Esercizio 2. Siano V e W spazî vettoriali di dimensione finita. Provare che se $\dim_{\mathbb{R}}(V) \leqslant \dim_{\mathbb{R}}(W)$ allora esistono applicazioni lineari $f : V \to W$ iniettive. Provare inoltre che se $f : V \to W$ è un'applicazione lineare iniettiva allora esiste $g : W \to V$ lineare tale che $g \circ f = \mathrm{id}_V$.

Esercizio 3. Esibire basi di nucleo e immagine dell'applicazione lineare associata alla matrice A data:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 7 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 9 \\ -5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Esercizio 4. Verificare che i sistemi di vettori $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ dati costituiscono basi di dominio e codominio dell'applicazione lineare f assegnata, e determinare la matrice associata rispetto a $\mathcal{B}$ in partenza e a $\mathcal{C}$ in arrivo.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \end{pmatrix},$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \end{pmatrix},$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

(c) $f : \mathcal{S}_2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(A) = \begin{pmatrix} a_{1\,1} + 2a_{1\,2} - a_{2\,2} \\ 5a_{1\,1} - 3a_{2\,1} + a_{2\,2} \end{pmatrix},$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{A}_3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & 2x_1 - x_2 \\ x_1 & 0 & x_1 - 3x_2 \\ x_2 - 2x_1 & 3x_2 - x_1 & 0 \end{pmatrix},$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

(e) $f : \mathbb{R}^2 \to \{y \in \mathbb{R}^3 : \ y_1 + y_2 + y_3 = 0\}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - x_2 \end{pmatrix},$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$$

Esercizio 5. Dati spazî vettoriali V di dimensione n e W di dimensione m, e loro sottospazî $X \subset V$ di dimensione k e $Y \subset W$ di dimensione h, provare che

$$\{f \in \mathcal{L}(V, W) : \ f(X) \subset Y\}$$

è un sottospazio di $\mathcal{L}(V, W)$, calcolandone la dimensione.

Esercizio 6. Dati spazi vettoriali X, Y, Z, W e applicazioni lineari $g : X \to Y$ e $h : Z \to W$, provare che

$$\{f \in \mathcal{L}(Y, Z) : \ h \circ f \circ g = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(Y, Z)$, calcolandone la dimensione in funzione delle dimensioni di $X, Y, Z, W, \mathrm{Im}(g), \mathrm{Im}(h)$.

Esercizio 7. Stabilire che dimensione possa avere l'immagine di un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^9$ tale che

$$f(e_1 + 2e_4 - 7e_5) = f(3e_2 + e_3 + e_4) = 8e_1 - e_9.$$

Esercizio 8. Dati un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^6$ e sottospazî $X \subset \mathbb{R}^7$ e $Y \subset \mathbb{R}^6$, calcolare la dimensione di X sapendo che quella di Y vale 2 e che

$$\mathbb{R}^7 = X \oplus \mathrm{Ker}(f), \qquad \mathbb{R}^6 = Y \oplus \mathrm{Im}(f).$$

Esercizio 9. Se $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^8$ ha nucleo di dimensione 2 e Z è un sottospazio di $\mathbb{R}^8$ tale che $Z \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, che dimensione può avere Z?

Esercizio 10. Se $f : \mathbb{R}^{11} \to \mathbb{R}^7$ ha immagine di dimensione 5 e X è un sottospazio di $\mathbb{R}^{11}$ tale che $X + \mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^{11}$, che dimensione può avere X?