Esercizî di Algebra Lineare (Petronio 14/15)

6 dicembre 2014

Esercizio 1. Determinare la posizione reciproca dei sottospazî affini E ed F assegnati, calcolando le dimensioni di E, F, $E \cap F$ ed $E + F$.

(a) $E, F \subset \mathbb{R}^3, \quad E : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \\ z = 2 + 4t \end{cases}$
$F :\ 3x - 5y + 2z = 7$

(b) $E, F \subset \mathbb{R}^3, \quad E : \begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = -1 + 5t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$
$F :\ 7x - 5y - 2z = 11$

(c) $E, F \subset \mathbb{R}^3, \quad E :\ 3x - 5y + 2z = -1$
$F :\ 4x + 2y - 7z = 8$

(d) $E, F \subset \mathbb{R}^3, \quad E :\ 2x - 5y + 3z = 1$
$F : \begin{cases} x = -2 + t - s \\ y = 1 + t + 5s \\ z = 7 + t + 9s \end{cases}$

(e) $E, F \subset \mathbb{R}^3, \quad E : \begin{cases} 3x - 2y + z = -1 \\ 4x - 3y + 5z = 12 \end{cases}$
$F : \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -1 + 2t \\ z = 7 - 3t \end{cases}$

(f) $E, F \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 5t \\ z = 4 - 3t \\ w = -3 + t \end{cases}$

$F : \begin{cases} 2x + y - 4z + w = -12 \\ 3x + 2y - 6z + 5w = 1 \end{cases}$

(g) $E, F \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} x = 1 - t + s \\ y = 2 + 3t - s \\ z = 4 + 2t + s \\ w = -1 + 2t - s \end{cases}$

$F : \begin{cases} 3x + y + z - w = 1 \\ -x + 2y + 3z + w = 2 \end{cases}$

(h) $E, F \subset \mathbb{R}^4, \quad E : \begin{cases} x = 3 + 2t - s \\ y = -1 + 5t - 4s \\ z = 1 - 2t + 3s \\ w = 5 - 3t + 4s \end{cases}$

$F : \begin{cases} 3x - 2y + 4z - 5w = 1 \\ -x + 3y - 4z + 2w = 3 \end{cases}$

Esercizio 2. Risolvere rispetto a $z \in \mathbb{C}$ l'equazione assegnata:

(a) $z^2 + iz + 2 = 0$

(b) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

(c) $z^2 + (1 - 7i)z - 22 + 7i = 0$

(d) $z^3 = -8$

(e) $z^4 = 4i$

(f) $3(1 + i)z^3 - 4(3 + i)z^2 + (13 - i)z + 2(i - 2) = 0$

(g) $z^3\overline{z} + 8i = 2z\,(z + 2i\overline{z})$

(h) $z^2\overline{z} + 4i|z|^2 + i\overline{z} + 4 = z\overline{z}^2 + iz$

Esercizio 3. Sapendo che il polinomio $p(z)$ dato ha la radice z_1 indicata, trovare tutte le altre radici con la loro molteplicità:

(a) $p(z) = z^3 + (2-4i)z^2 - (4+8i)z - 8, \quad z_1 = -2$

(b) $p(z) = 4z^3 + (8i-4)z^2 - (5+4i)z + 1 - i, \quad z_1 = -\frac{i}{2}$

(c) $p(z) = z^4 + (1-i)z^3 + (1+3i)z^2 + (9-i)z - 5i, \quad z_1 = i$

(d) $p(z) = z^4 + (2i-1)z^3 + (3i-3)z^2 - (4+10i)z + 6 + 2i, \quad z_1 = 1-i$

(e) $p(z) = 4z^5 + 4(4i-3)z^4 - (13+36i)z^3 + 5(7+i)z^2 + 2(7i-4)z - 2(1+i), \quad z_1 = 1-i$

Esercizio 4. Verificare che $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiene a

$$V = \{z \in \mathbb{C}^4 : \; iz_1 + (1-i)z_2 - 2z_3 + (i-1)z_4 = 0\}$$

e completare (v_1) a una base di V.

Esercizio 5. Provare che $V = \{z \in \mathbb{C}^4 : \; 2iz_1 + (i-1)z_2 + (i+1)z_3 + 3z_4 = 0\}$ è generato dai vettori

$$\begin{pmatrix} 2-i \\ 3i \\ 2i \\ 3-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6i-3 \\ 4i-2 \\ 3-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1+2i \\ i \\ 2 \\ 1-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+i \\ 3+5i \\ 6+2i \\ 2-4i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1+2i \\ 2-i \\ -2/3 \end{pmatrix}$$

ed estrarre da questi ultimi una base di V.

Esercizio 6. Calcolare l'inversa della matrice assegnata:

(a) $\begin{pmatrix} 4 & -i \\ 1+i & 2-i \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1+2i & 3i-1 \\ 2+5i & 4-i \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1-i \\ 2i & 1+3i & -1 \\ 2+i & 1+i & 3i \end{pmatrix}$

Esercizio 7. Risolvere il sistema lineare assegnato:

(a) $\begin{cases} (3-i)z+(2+i)w = 14-3i \\ (1-2i)z+(1+4i)w = -4-5i \end{cases}$

(b) $\begin{cases} (2+i)z+(\alpha+2i)w = 1-i \\ (\alpha+2-3i)z+(5+i)w = \alpha+1 \end{cases}$ al variare di α in $\mathbb{C}$

(c) $\begin{cases} iz+(3-i)u = 2 \\ -w+5iu = 5+8i \\ (2+i)z-2iw = 2+4i \end{cases}$

Esercizio 8. Per il sottospazio affine E assegnato trovare una presentazione parametrica se ne è data una cartesiana, e viceversa:

(a) $E \subset \mathbb{C}^3, \quad E: \ (1-4i)z_1+(2+i)z_2+(3i-2)z_3 = 4-5i$

(b) $E \subset \mathbb{C}^4, \quad E: \ (1+i)z_1+(4i-1)z_2+(6+i)z_3+(1-2i)z_4 = 2-3i$

(c) $E \subset \mathbb{C}^3, \quad E: \begin{cases} (1-i)z_1+2iz_2+(4-i)z_3 = i \\ 2iz_1+(1+2i)z_2+(1+i)z_3 = -2 \end{cases}$

(d) $E \subset \mathbb{C}^4, \quad E: \begin{cases} (1+i)z_1+3iz_2+(3-2i)z_3+5z_4 = 2i \\ (2+i)z_1+2iz_2+(1-2i)z_3+3iz_4 = 1 \end{cases}$

(e) $E \subset \mathbb{C}^3, \quad E: \begin{cases} z_1 = -1+(1+i)u \\ z_2 = 1+i-4iu \\ z_3 = 2i+7u \end{cases}$

(f) $E \subset \mathbb{C}^4, \quad E: \begin{cases} z_1 = 1-i+(6+i)u \\ z_2 = 3i-2+(1+i)u \\ z_3 = -4i+(2-i)u \\ z_4 = -4+(5+i)u \end{cases}$

(g) $E \subset \mathbb{C}^3, \quad E = \begin{cases} z_1 = i+2u-5iw \\ z_2 = 3+(1-i)u+2w \\ z_3 = 1+i+3iu+(1+2i)w \end{cases}$

(h) $E \subset \mathbb{C}^4, \quad E: \begin{cases} z_1 = -1+iu+(1+i)w \\ z_2 = i+(3-i)u+2w \\ z_3 = 1+i+(4-i)u+3iw \\ z_4 = 1+(2+i)u+(i-3)w \end{cases}$