Esercizî di Algebra Lineare (Petronio 14/15)

2 novembre 2014

Esercizio 1 Verificare che l'applicazione assegnata è lineare ed esibirne nucleo e immagine, verificando la formula della dimensione.

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \\ -2x_1 + 5x_3 + 7x_3 \end{pmatrix}$

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_2 + 11x_3 \end{pmatrix}$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

(d) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \\ 4x_1 + 5x_2 - x_3 \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

(e) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

(f) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_4 \\ x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 \end{pmatrix}$

(g) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 7x_4 \end{pmatrix}$

(h) $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad f(A) = A + {}^{\mathrm{t}}A$

(i) $f : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}), \quad f(A) = A - {}^{\mathrm{t}}A$

(j) $f : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, \quad f(A) = \begin{pmatrix} a_{1\,1} - 3a_{1\,2} \\ 2a_{2\,1} + a_{1\,2} \\ -a_{1\,1} + 5a_{2\,2} \end{pmatrix}$

(k) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - x_3 & x_1 + 2x_2 \\ 3x_2 + 2x_3 & x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$

(l) $f : \mathbb{R}_{\leqslant d}[t] \to \mathbb{R}_{\leqslant d}[t], \quad f(p(t)) = p'(t)$

(m) $f : \mathbb{R}_{\leqslant 3}[t] \to \mathbb{R}^2, \quad f(p(t)) = \begin{pmatrix} p(2) - p'(-1) \\ p(1) + 2p''(2) \end{pmatrix}$

(n) $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_{\leqslant 2}[t]$,
$f(x) = (x_1 + 3x_2 - x_4) + (x_2 + 2x_3 - x_4)t + (x_1 - 6x_3 + 2x_4)t^2$

Esercizio 2. Posto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verificare la relazione $f_{(A\cdot B)}(x) = (f_A \circ f_B)(x)$.

Esercizio 3. Date $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{M}_{k\times h}(\mathbb{R})$ verificare che la formula $f(X) = A\cdot X\cdot B$ definisce un'applicazione $f : \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{m\times h}(\mathbb{R})$ lineare, e che $\mathrm{Ker}(f) = \{X :\ X(\mathrm{Im}B) \subset \mathrm{Ker}A\}$.

Esercizio 4. Posto

$$X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 3 \\ -7 & 1 & -9 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

provare che la formula $g(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione $g : X \to X$ lineare.

Esercizio 5. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ descrivere

$$\{B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) :\ A \cdot B = B \cdot A\}.$$

Esercizio 6. Data $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ provare che $\{B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) :\ A\cdot B = B\cdot A\}$ è un sottospazio vettoriale e che ha sempre dimensione almeno 2; dire per quali A coincide con $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e provare che non può avere dimensione 3.

Esercizio 7. Per lo spazio vettoriale V dato e i sottospazî W e Z assegnati provare che si ha la decomposizione in somma diretta $V = W \oplus Z$ ed esibire le associate proiezioni p e q, provando che

$$p \circ p = p, \qquad q \circ q = q, \qquad p \circ q = q \circ p = 0.$$

(a) $V = \mathbb{R}^2, \quad W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Z = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $V = \mathbb{R}^2, \quad W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad Z :\ 5x_1 + 2x_2 = 0$

(c) $V = \mathbb{R}^2, \quad W :\ 3x_1 + 7x_2 = 0, \quad Z :\ 2x_1 - 9x_2 = 0$

(d) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right), \quad Z = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(e) $V = \mathbb{R}^3, \quad W :\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0, \quad Z = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(f) $V = \mathbb{R}^3, \quad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right),$

$Z :\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

(g) $V = \mathbb{R}^3, \quad W :\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \quad Z :\ \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

(h) $V = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$, $\quad W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix}$,

$Z:\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0$

(i) $V = \mathbb{R}_{\leqslant 3}[t]$, $\quad W = \mathrm{Span}(2 - t + t^3,\ 1 + t^2 - 4t^3)$,

$Z:\ \begin{cases} p(1) + p'(-1) = 0 \\ p(2) - 2p''(1) = 0 \end{cases}$