Esercizî di Algebra Lineare (Petronio 14/15)

2 ottobre 2014

Esercizio 1. Dimostrare che $n! > 2^n$ per $n \geqslant 4$ con un argomento diretto.

Esercizio 2. Dimostrare che dati $x, y \in \mathbb{R}$ con $x \in \mathbb{Q}$ e $y \notin \mathbb{Q}$ si ha $x+y \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 3. Dimostrare che se $p \in \mathbb{N}$ è un numero primo maggiore di 2 l'equazione $x^2 = p$ non ha soluzioni in $\mathbb{Q}$.

Esercizio 4. Dimostrare per induzione che un insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi (compreso il sottoinsieme vuoto e l'insieme intero).

Esercizio 5. Dimostrare per induzione che $9^{n+1} + 2^{6n+1}$ è divisibile per 11 per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esercizio 6. (Usando il principio di induzione completa) dimostrare il *principio del minimo*: se $X \subset \mathbb{N}$ è non vuoto, allora ammette un elemento minimo, cioè esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $m \in X$ e $m \leqslant x$ per ogni $x \in X$.

Esercizio 7. (Usando il principio del minimo) dimostrare la regola di divisione euclidea per i numeri interi: per ogni $n, m \in \mathbb{Z}$ con $m > 0$ esistono unici $q, r \in \mathbb{Z}$ tali che $n = m \cdot q + r$ e $0 \leqslant r < m$.

Esercizio 8. (Usando il principio del minimo) dimostrare la regola di divisione per i polinomi: per ogni $f(x), g(x) \in \mathbb{R}[x]$ con $\deg(g(x)) > 0$ esistono unici $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}$ tali che $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r(x)$ e $0 \leqslant \deg(r(x)) < \deg(g(x))$.

Esercizio 9. Provare che se $(F_n)_{n=0}^{+\infty}$ è la successione di Fibonacci, definita dalle relazioni

$$\begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

allora

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Esercizio 10. Verificare che $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ è intero per ogni $n \in \mathbb{N}$, quindi provare che

$$\sum_{j=0}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Esercizio 11. Considerare l'insieme $F_2 = \{0, 1\}$ con le operazioni $\oplus$ e $\odot$ definite come segue:

- $0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0, \quad 1 \oplus 0 = 0 \oplus 1 = 1$
- $0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0, \quad 1 \odot 1 = 1.$

Provare che F_2 con tali operazioni è un campo.

Esercizio 12. Dire se la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ data da $f(n) = (n^2, 3n-2)$ sia iniettiva e se sia surgettiva. Posto $\Delta = \{(n,n) \in \mathbb{N}^2 : \ n \in \mathbb{N}\}$, determinare $f^{-1}(\Delta)$.

Esercizio 13. Detti P il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ dei numeri pari e D quello dei numeri dispari, esibire funzioni bigettive

$$f : P \to D \qquad g : \mathbb{N} \to P \qquad h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}.$$

Esercizio 14.

- (Per induzione su n) stabilire che se X e Y sono insiemi finiti con lo stesso numero n di elementi e $f : X \to Y$ è una funzione iniettiva, allora f è anche surgettiva;

- (Usando il fatto precedente) stabilire che se X e Y hanno lo stesso numero finito di elementi e $f : X \to Y$ è una funzione surgettiva, allora f è anche iniettiva.

Dedurre dai fatti precedenti che se X è un insieme finito e $f : X \to X$ è una funzione, allora f è iniettiva se e soltanto se è surgettiva.

Esercizio 15. Dato $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 3$ sull'insieme $F_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ considerare le operazioni $\oplus$ e $\odot$ definite come segue:

- $a \oplus b$ è il resto della divisione euclidea $(a + b) : n$
- $a \odot b$ è il resto della divisione euclidea $(a \cdot b) : n$.

(Usando l'esercizio precedente) provare che F_n con tali operazioni è un campo se e soltanto se n è primo.

Esercizio 16. Date $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e posto $F = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ f(x) = 0\}$ e $G = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ g(x) = 0\}$ trovare $u, i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tali che

$$F \cup G = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ u(x) = 0\}, \qquad F \cap G = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ i(x) = 0\}.$$