UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 11/9/15 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Trovare $a, b \in \mathbb{R}$ sapendo che posto $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} a \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ b \end{pmatrix} \right)$ si ha $\left[\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2. Avendo 5 vettori linearmente indipendenti in $W = \{z \in \mathbb{C}^{13} : \ (1-i)z_4 + 7z_{13} = 0\}$, quanti vettori bisogna aggiungere per ottenere una base di W?

3. Se $f : \mathbb{R}_{\leqslant 5}[t] \to \mathbb{R}^{12}$ è lineare non iniettiva e $X \subset \mathbb{R}^{12}$ è un sottospazio tale che $\mathbb{R}^{12} = X \oplus \mathrm{Im}(f)$, che dimensione può avere X?

4. Risolvere $\begin{cases} (1-i)z + 3w = 7 - 2i \\ 2iz + (1+i)w = 1 + i. \end{cases}$

5. Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineare tale che $f\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, trovare $f^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$.

6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ i vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t+3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ t-6 \end{pmatrix}$ siano linearmente indipendenti.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 7x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(e_1 + 5e_2 + 2e_3)$, calcolare la proiezione su X di $3e_1 + 3e_2 - e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. In $\mathbb{R}^3$ considerare i sottospazî definiti dalle equazioni seguenti:

$$W: \ 10x - 30y + 6z = 0, \qquad Z: \ 21x + 6y - 14z = 0.$$

(A) (4 punti) Trovare tutti i vettori di W con le componenti intere e prime fra loro, di cui una nulla e positiva quella con indice minore tra quelle non nulle. Disporre tali vettori in modo che sia crescente la somma delle componenti ed estrarne una base di W. (Per l'estrazione usare l'ordinamento appena ottenuto.)

(B) (4 punti) Trovare tutti i vettori di Z con le componenti intere e prime fra loro, di cui una nulla e positiva quella con indice maggiore tra quelle non nulle. Disporre tali vettori in modo che sia decrescente la quantità $2x+y+z$ ed estrarne una base di Z. (Per l'estrazione usare l'ordinamento appena ottenuto.)

(C) (4 punti) Dette $\mathcal{A}$ la base di W trovata al punto (A) e $\mathcal{B}$ la base di Z trovata al punto (B), calcolare $f(9e_1 + e_2 - 10e_3)$ dove $f : W \to Z$ è lineare e $[f]_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^4$ i sottospazî affini seguenti:

$$E_t = \begin{pmatrix} t-1 \\ 0 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1+t \\ -2 \\ 1+3t \\ t-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2t \\ 6-t \\ -15 \\ -t \end{pmatrix} \right)$$

$$F_s: \ \begin{cases} 5x + (6-s)y + (1+4s)z + (2+3s)w = s-1 \\ (6+s)x + 4y + (s-2)z + sw = s+2. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Trovare $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\dim(E_t) = n_0$ per $t = t_0$ e $\dim(E_t) = n_1$ per $t \neq t_0$.

(B) (3 punti) Trovare $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ e $s_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $\dim(F_s) = m_0$ per $s = s_0$ e $\dim(F_s) = m_1$ per $s \neq s_0$.

(C) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di E_t per $t = 2$ e per $t = t_0$.

(D) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di F_s per $s = -3$ e per $s = s_0$.

Risposte

5. ♢

1. $a = 7$, $b = -1$

2. 7

3. Tra 7 e 12 compresi

4. $z = i$, $w = 2 - i$

5. $\begin{pmatrix} 17 \\ -15 \end{pmatrix}$

6. $t = -5$ e $t = 34$

7. $-\begin{pmatrix} 1 \\ 17 \\ 9 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$; scartare il terzo vettore

(B) $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$; scartare il terzo vettore

(C) $\begin{pmatrix} -16 \\ 35 \\ -9 \end{pmatrix}$

2.

(A) $n_0 = 1,\ n_1 = 2,\ t_0 = 3$

(B) $m_0 = 3,\ m_1 = 2,\ s_0 = -4$

(C) $E_2 : \begin{cases} 2x + 17y + 4z = 6 \\ y + 2w = 4 \end{cases}$

$E_3 : \begin{cases} x + 2y = 2 \\ 5y + z = 1 \\ y + w = 3 \end{cases}$

(D) $F_{(-3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$F_{(-4)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$