

Alg. Lim. 30/8/14

CARLO PETRONIO

home page $\rightarrow$ didattica $\rightarrow$ A.A. 14/15

- Queste lezioni vanno in rete
- Fare domande
- Fare esercizi in rete: PROVATECI!
- Co-docente F.G. Collopari (dal 7/10)
- Rete: orario esatto
- Domani: F06 non F09
- Libri: testo (Esculetto)

— o —

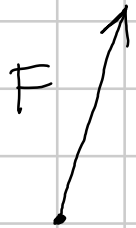
Algebra lineare

rette, eq. parametriche ...

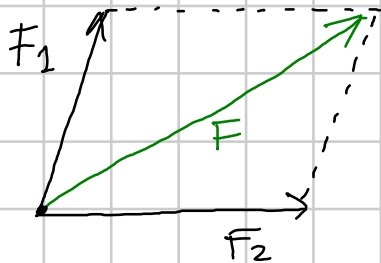
numeri, polinomi, operazioni

"manipolazioni di tipo fisico con
oggetti geometrici"

Esempio: forze applicate a un punto materiale
che si muove su un piano:



F è un vettore, cioè
un oggetto dotato di:
direzione, verso, intensità



$F = \text{risultante di } F_1 \text{ e } F_2$

Notazione:

risultante di F_1 e F_2 si
indica con $F_1 + F_2$

stesso simbolo della

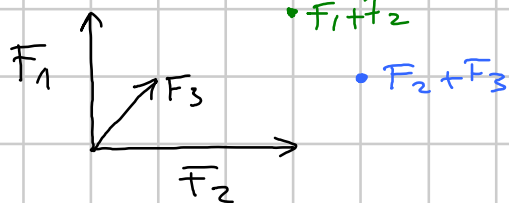
operazione tra numeri
usata invece per le
forze (altra natura)

Q: Perché?

A: Perché valgono proprietà analoghe a quelle dei + tra numeri:

3. $F_1 + (F_2 + F_3) = (F_1 + F_2) + F_3$ associativa

• $(F_1 + F_2) + F_3 = F_1 + (F_2 + F_3)$



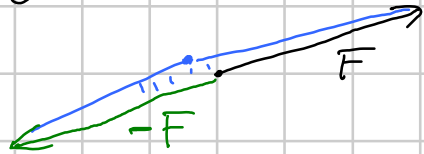
4. $F_1 + F_2 = F_2 + F_1$ (commutativa)

1. $\exists 0$ (forza zero: intensità nulla) t.c.

$F + 0 = F$ (c.l. neutro)

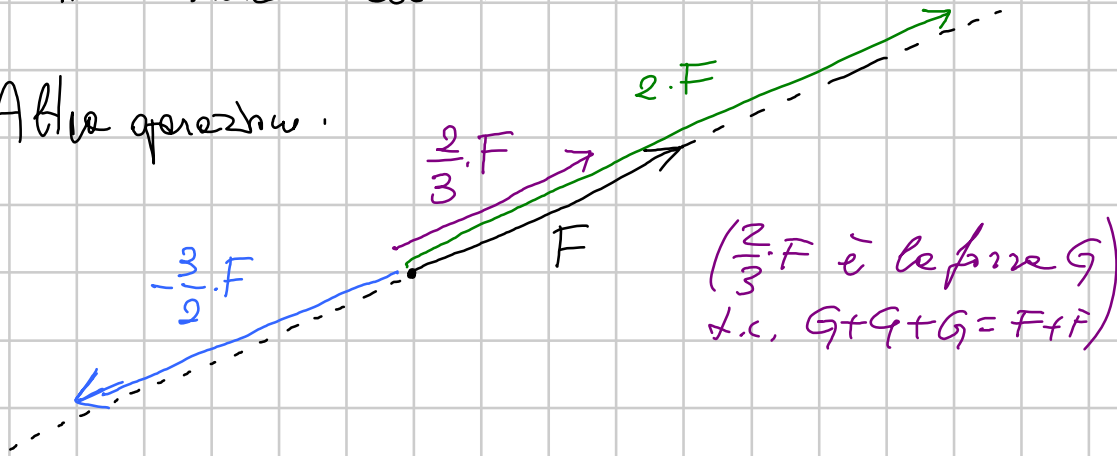
2. $\forall F \exists (-F)$ (forze opposte: stessa direzione, stessa intensità, verso opposto)

t.c. $F + (-F) = 0$



Morale: l'operaz. "risultante" tre forze
 he le 4 proprietà fondamentali del + tre numeri
 $\Rightarrow$ si indice col + -

Altre operazioni.



Estendendo definitivamente: (per 1 numero e F forze)

$$\lambda \cdot F = \begin{cases} \text{direzione uguale o opposta a } F \\ \text{verso come } F, \text{ se } \lambda \geq 0, \text{ opposto se } \lambda \leq 0 \\ \text{intensità } |\lambda| \text{ volte quella di } F \end{cases}$$

Proprietà:

$$5. \lambda \cdot (F_1 + F_2) = (\lambda \cdot F_1) + (\lambda \cdot F_2)$$

sottointeso: • lea più del +

$$6. (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot F = \lambda_1 \cdot F + \lambda_2 \cdot F$$

distributiva

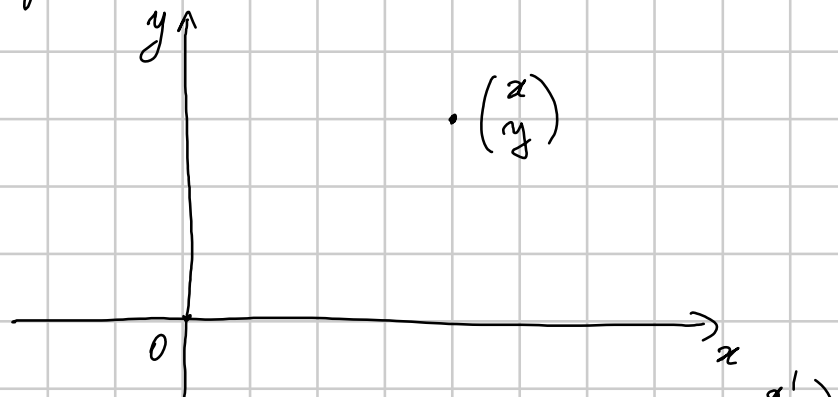
Q: In 5 & 6 quali sono le nuove operazioni e quali le vecchie?

$$7. (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot F = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot F) \quad \text{"associativa 1."}$$

$$8. 1 \cdot F = F$$

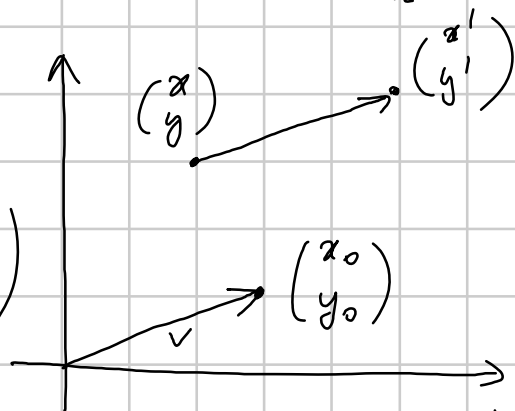
(Sarà un esempio di "spazio vettoriale": ^{def} con buona delle prime parti -)

Esempio: Piano cartesiano



Traslazione:

$$T_v: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

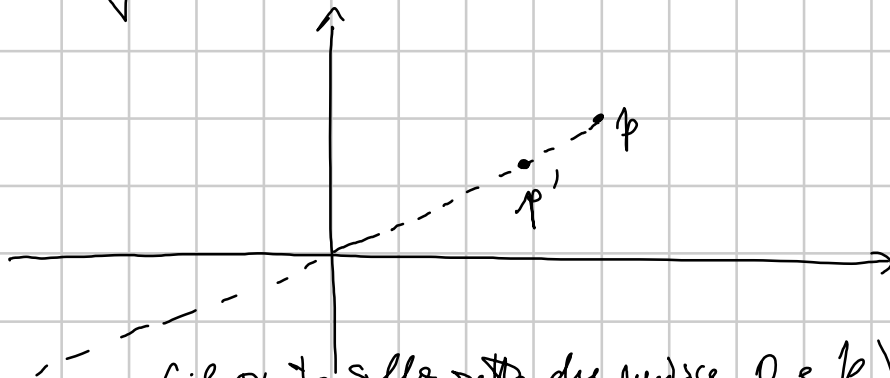
Notazione: scriviamo $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

↑
nuovo

Verificare facile: il + tra punti del piano verifica le stesse proprietà 1-4:

1. $\exists 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ t.c. $p + 0 = p \quad \forall p$
2. $\forall p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \exists -p = \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$ t.c. $p + (-p) = 0$
3. $(p+q)+r = p+(q+r)$ t.c. $p+q = q+p$

Quotientia di regione λ :



$O_\lambda: p \mapsto p' =$ (il punto sulla retta che unisce 0 e p ,
a distanza $|\lambda|$ volte da 0 rispetto a
quello di p , dalla parte opposta se $\lambda < 0$)

Notazione: p' lo indichiamo con $\lambda \cdot p$
↖ nuovo

Valgono:

5. $\lambda \cdot (p_1 + p_2) = \lambda \cdot p_1 + \lambda \cdot p_2$

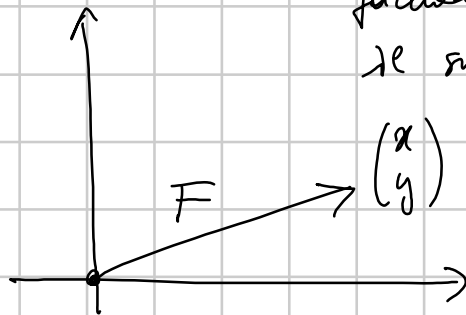
6. $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot p = \lambda_1 \cdot p + \lambda_2 \cdot p$

7. $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot p = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot p)$

8. $1 \cdot p = p$

Qss: i due esempi si ottengono uno dall'altro:

Forze nel piano con
mettendo 0 nel punto di
applicazione delle forze e
facendo corrispondere a F
il suo secondo ordinato:



$$F \leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

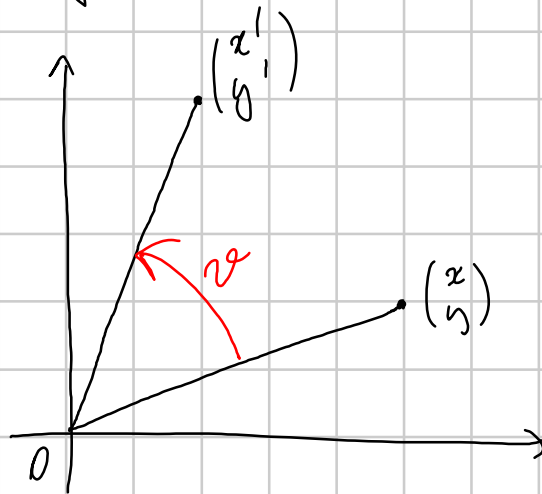
Le questioni sono "le stesse":

$$F_1 \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad F_2 \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

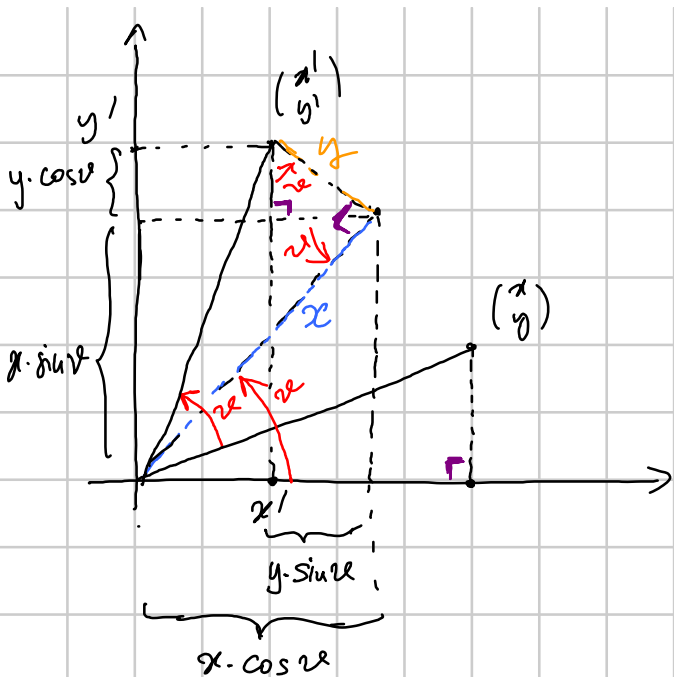
$$\Rightarrow \underline{F_1 + F_2} \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Rotazione del piano di angolo φ :

$$f_\varphi : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$



In coordinate:



$$\begin{cases} x' = \cos \theta \cdot x - \sin \theta \cdot y \\ y' = \sin \theta \cdot x + \cos \theta \cdot y \end{cases}$$

"qualcosa che
dipende da θ
moltiplicato per x, y "

Idea: scriverlo

come

$$R_\theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

da invertire

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

$$\text{Ora: } P_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_\theta \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

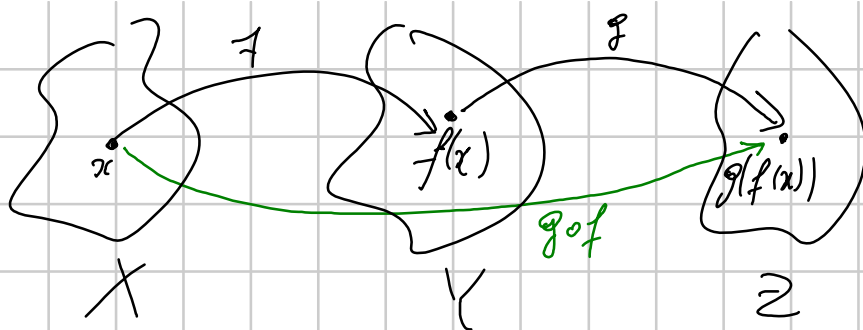
$$p_v \circ p_g \quad \dots$$

Definizione: $f: X \rightarrow Y$ funzione è una legge che a ogni elemento dell'insieme X (dominio) associa un elemento dell'insieme Y (codominio) -

La funzione non è solo la legge ma ne fanno parte anche X e Y .

Es.: $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f_1(x) = x^2$
 $f_2: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f_2(x) = x^2$
 $f_3: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty) \quad f_3(x) = x^2$ } sono tutte diverse

Composizione: se ho $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ funzioni costruisco $g \circ f: X \rightarrow Z$
 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



Oss: in generale non è vero che $g \circ f = f \circ g$ infatti:

- per poter fare le composizioni devo avere

$$\begin{array}{ll} f: X \rightarrow Y & g: Y \rightarrow X \\ g: Y \rightarrow X & f: X \rightarrow Y \end{array}$$

- se con è ho $g \circ f: X \rightarrow X$

$$f \circ g: Y \rightarrow Y$$

se $X \neq Y$ non ho senso dire che $f \circ g = g \circ f$

- se anche $X = Y$ può non essere vero:

$$f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = 2x$$

$$(f \circ g)(x) = 4x^2$$

$$(g \circ f)(x) = 2x^2$$

Per concludere che $f \circ g \neq g \circ f$ devo esibire un
punto su cui hanno valori diversi: ad es $x=1$
(oppure $\sqrt[3]{\pi}$)

Oss: $f(x) = x^2$ saranno diversi, ma ...

$$g(x) = |x|$$

$$X = Y = \{+1, -1\}$$

quindi $f = g$ -

Rotazioni:

$$\begin{aligned} (P_v \circ P_\varphi) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= P_v \left(P_\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = P_v (R_\varphi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \\ &= R_v \cdot (R_\varphi \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

$$= (R_{2\theta} \cdot R_{\varphi}) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

sarebbe
illegale
operazione non definita

Le definisco:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} ax+by & az+bw \\ cx+dy & cz+dw \end{pmatrix}$$

$$R_{2\theta} \cdot R_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi - \sin \theta \sin \varphi & -\cos \theta \sin \varphi - \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi + \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta + \varphi) & -\sin(\vartheta + \varphi) \\ \sin(\vartheta + \varphi) & \cos(\vartheta + \varphi) \end{pmatrix}$$

$$= R_{(\vartheta + \varphi)} \quad \text{Scoperto che con la def. data}$$

$$(P_{\vartheta} \circ P_{\varphi}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R_{(\vartheta + \varphi)} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$P_{\vartheta + \varphi}$$

Lemma: la moltiplicazione
(algebraica) due matrici corrisponde
alla composizione (geometrica)
delle trasformazioni rappresentate.

$$\underline{\text{Oss:}} \quad P_{\vartheta} \circ P_{\varphi} = P_{\varphi} \circ P_{\vartheta} \quad (= P_{\vartheta + \varphi} = P_{\varphi + \vartheta})$$

Però non è vero in generale che $A \cdot B = B \cdot A$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -18 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -5 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Numeri di Fibonacci -

Ho un giardino e oggi è il primo giorno del mese 0
 vuoto -

A metà mese pianto un albero con un solo ramo -

Che si sviluppa così:

- Nessun ramo muore mai
- A ogni nuovo mese, ogni ramo non nato getta un nuovo ramo -

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...

Q: Quanto fa f_{1000} ?

Formula mignocosa:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\underbrace{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n}_{\substack{\text{sequenza aurea} \\ \sim 1.62 \dots}} - \underbrace{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n}_{\substack{\sim -0.62 \dots \\ \text{per } n \gg 0 \\ \text{è trascurabile}}} \right)$$

Fatto: dimostrare questa formula e
spiegare perché esiste.