Alg. Lin. 29/10/14

$f: V \to W$ lineare ; $Ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$

<u>Teo</u>: $\dim(Ker(f)) + \dim(Im(f)) = \dim(V)$

<u>Dim</u>: chiamo $n = \dim(V)$, $k = \dim Ker(f)$.

Tesi: $\dim(Im f) = n - k$.

Scelgo $v_1, \dots, v_k$ base di $Ker f$.

La completo a base $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ di V.

Affermo che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_m)$ sono base di $\operatorname{Im} f$; questo basta a concludere.

Generano: sia $w \in \operatorname{Im}(f)$; cioè $w = f(v)$ con $v \in V$; scrivo $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

$$\Rightarrow w = f(v) = \alpha_1 \underbrace{f(v_1)}_{=0} + \dots + \alpha_k \underbrace{f(v_k)}_{=0} + \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_m f(v_m)$$

OK

Lin. indip: supponiamo che

$$\alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_m f(v_m) = 0;$$

$$\Rightarrow f(\alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n) = 0$$

cioè $\alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n \in \operatorname{Ker} f$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$\Rightarrow (-\alpha_1)v_1 + \dots + (-\alpha_k)v_k + \alpha_{k+1}v_{k+1} + \dots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\Rightarrow (-\alpha_1) = \dots = (-\alpha_k) = \underbrace{\alpha_{k+1} = \dots = \alpha_n = 0}_{\text{OK}}$$

$\blacksquare$

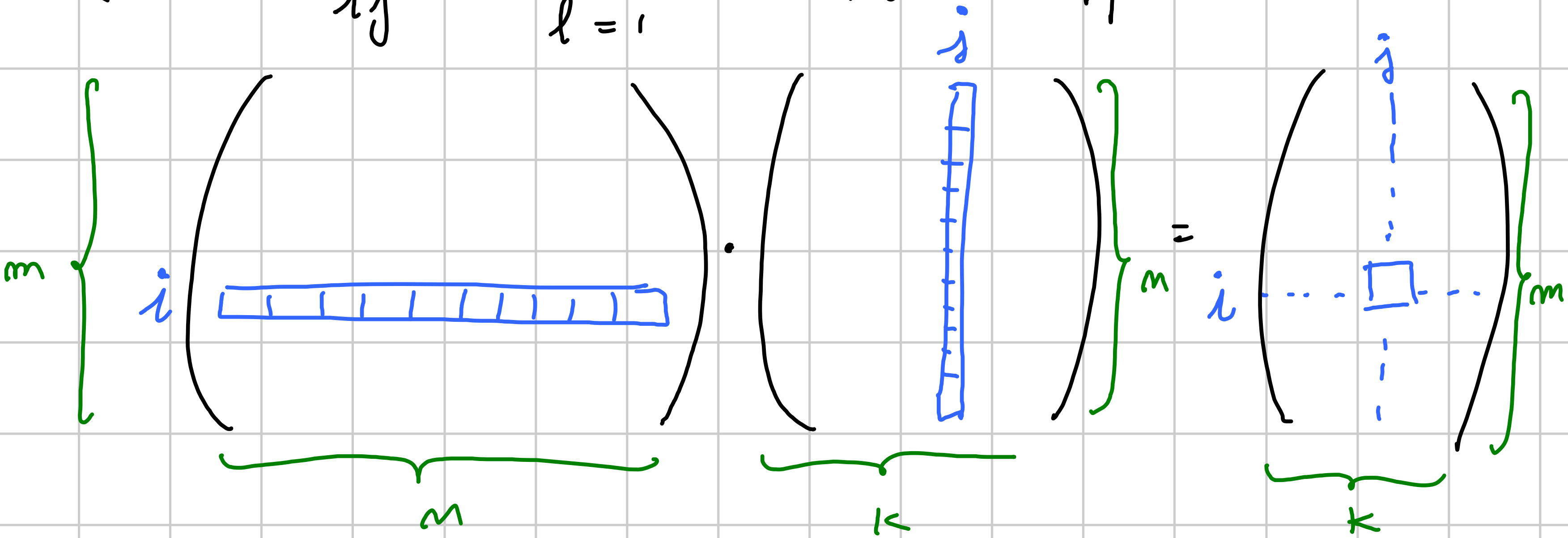
Come costruire applicazioni lineari: matrici.

<u>Def</u>: prodotto righe x colonne tra matrici:

$A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n\times k}(\mathbb{R})$;

definisco $A\cdot B \in \mathcal{M}_{m\times k}$ così :

$$(A\cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{il}\cdot (B)_{lj}$$



Es:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -7 \\ 2 & 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \square & \square & \boxed{25} & \square \\ \boxed{6} & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

$2 \times 3 \qquad 3 \times 4 \qquad 2 \times 4$

Caso particolare $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n \times 1}$

ho $A \cdot x \in \mathcal{M}_{m \times 1} = \mathbb{R}^m$

Prop: il prodotto righe × colonne è lineare in ciascuno dei suoi argomenti ed è associativo.

Dim: devo vedere che

$$(\bullet)\quad A\cdot(\lambda_1\cdot B_1+\lambda_2\cdot B_2)=\lambda_1\cdot A\cdot B_1+\lambda_2\cdot A\cdot B_2 \qquad \text{lin a dx}$$

$$(\bullet\bullet)\quad \underbrace{\Big(\underbrace{\underbrace{\lambda_1\cdot A_1}_{m\times n}}_{m\times n}+\underbrace{\underbrace{\lambda_2\cdot A_2}_{m\times n}}_{m\times n}\Big)}_{m\times n}\cdot\underbrace{B}_{n\times k}=\underbrace{\underbrace{\lambda_1\cdot\underbrace{A_1\cdot B}_{m\times n\ \ n\times k}}_{m\times k}}_{m\times k}+\underbrace{\underbrace{\lambda_2\cdot\underbrace{A_2\cdot B}_{m\times n\ \ n\times k}}_{m\times k}}_{m\times k} \qquad \text{lin a sx}$$

Provo la $(\bullet\bullet)$: sono matrici della stessa taglia: basta vedere che hanno $\forall\, i,j$ lo stesso coeff. nel posto (i,j)

$$((\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2) \cdot B)_{ij} = \sum_{l=1}^{m} (\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)_{il} \cdot (B)_{lj}$$

$$= \sum_{l=1}^{m} \left(\lambda_1 \cdot (A_1)_{il} + \lambda_2 \cdot (A_2)_{il} \right) \cdot (B)_{lj}$$

$$(\lambda_1 \cdot A_1 \cdot B + \lambda_2 \cdot A_2 \cdot B)_{ij} = \lambda_1 (A_1 \cdot B)_{ij} + \lambda_2 \cdot (A_2 \cdot B)_{ij}$$

$$= \lambda_1 \sum_{l=1}^{m} (A_1)_{il} \cdot (B)_{lj} + \lambda_2 \cdot \sum_{l=1}^{n} (A_2)_{il} \cdot (B)_{lj}$$

OK

Associativa:

$$\underbrace{A}_{m\times m} \cdot \underbrace{(\overset{m\times k}{B} \cdot \overset{k\times h}{C})}_{m\times h} = \underbrace{(\overset{m\times m}{A} \cdot \overset{m\times k}{B})}_{m\times k} \cdot \overset{k\times h}{C}$$

$m \times h$ $\qquad\qquad$ $m \times h$

Verifico che hanno lo stesso coeff in ogni posto:

$$(A\cdot(B\cdot C))_{is} = \sum_{t=1}^{n} (A)_{it}\cdot(B\cdot C)_{ts} = \sum_{t=1}^{n}(A)_{it}\sum_{l=1}^{k}(B)_{tl}\cdot(C)_{ls}$$

$$((A\cdot B)\cdot C)_{is} = \sum_{l=1}^{k}(A\cdot B)_{il}\cdot(C)_{ls} = \sum_{l=1}^{k}\sum_{t=1}^{n}(A)_{it}\cdot(B)_{tl}\cdot(C)_{ls}$$

$\boxtimes$

Attenzione: non è commutativo.

$$\underbrace{\underset{m\times m}{A}\cdot\underset{m\times m}{B}}_{m\times m} \underset{?}{\neq} \underbrace{\underset{m\times m}{B}\cdot\underset{m\times m}{A}}_{m\times m}$$

Se $m \neq n$ certamente sono diverse.

Se $m = n$ (tutte quadrate) l'uguaglianza

$A \cdot B = B \cdot A$ ha senso ma non vale (sempre):

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 7 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 30 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad \underline{\text{NO}} \quad \begin{pmatrix} 17 & \cdot \\ - & \cdot \end{pmatrix}$$

__Def__: data $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ poniamo

$f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ data da $f_A(x) = A \cdot x$.

Grazie alla Prop. ho che f_A è lineare.

<u>Oss</u>: la composizione di appl. lin. qualsiasi è lin.

<u>Oss</u>: $f_A \circ f_B = f_{A \cdot B}$

cioè "il prodotto righe x col. di matrici corrisponde alla composizione di applicazioni".

Infatti: $A \in M_{m \times n}$; $B \in M_{n \times k}$

$\Rightarrow A \cdot B \in M_{m \times k}$, $f_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f_B : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $f_{A\cdot B} : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$; dunque

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^k \arrow[r, "f_B"] \arrow[rr, bend left, "f_A \circ f_B"] \arrow[rr, bend right, "f_{A\cdot B}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $f_A \circ f_B = f_{A\cdot B}$ è un'uguaglianza tra funzioni $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$

Devo vedere che $(f_A \circ f_B)(x) = f_{A \cdot B}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^k$

$$f_A(f_B(x)) = (f_A \circ f_B)(x)$$

$$A \cdot (B \cdot x) = f_A(f_B(x))$$

$$(A \cdot B) \cdot x = f_{A \cdot B}(x)$$

<u>OK</u> (associatività) $\boxed{\ }$

Grazie al fatto precedente conviene scrivere solo A invece che f_A, cioè si identifica una $A \in M_{m \times n}$ con la applicazione lineare $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

date da $x \longmapsto A \cdot x$ _

________ ∘ ________

Somme dirette

<u>Def</u>: se $W, Z \subset V$ sono stsp. vett.
diciamo che V è somma diretta di W e Z,
scrivendo $V = W \oplus Z$ se $V = W + Z$
e $W \cap Z = \{0\}$ _

(Ricordo: $W + Z = \mathrm{Span}(W \cup Z)$
$= \{w + z : w \in W, z \in Z\}$ _

Prop: $V = W \oplus Z \Longleftrightarrow$ ogni $v \in V$ si scrive in uno e un solo modo come

$$v = \underset{\in W}{w} + \underset{\in Z}{z}$$

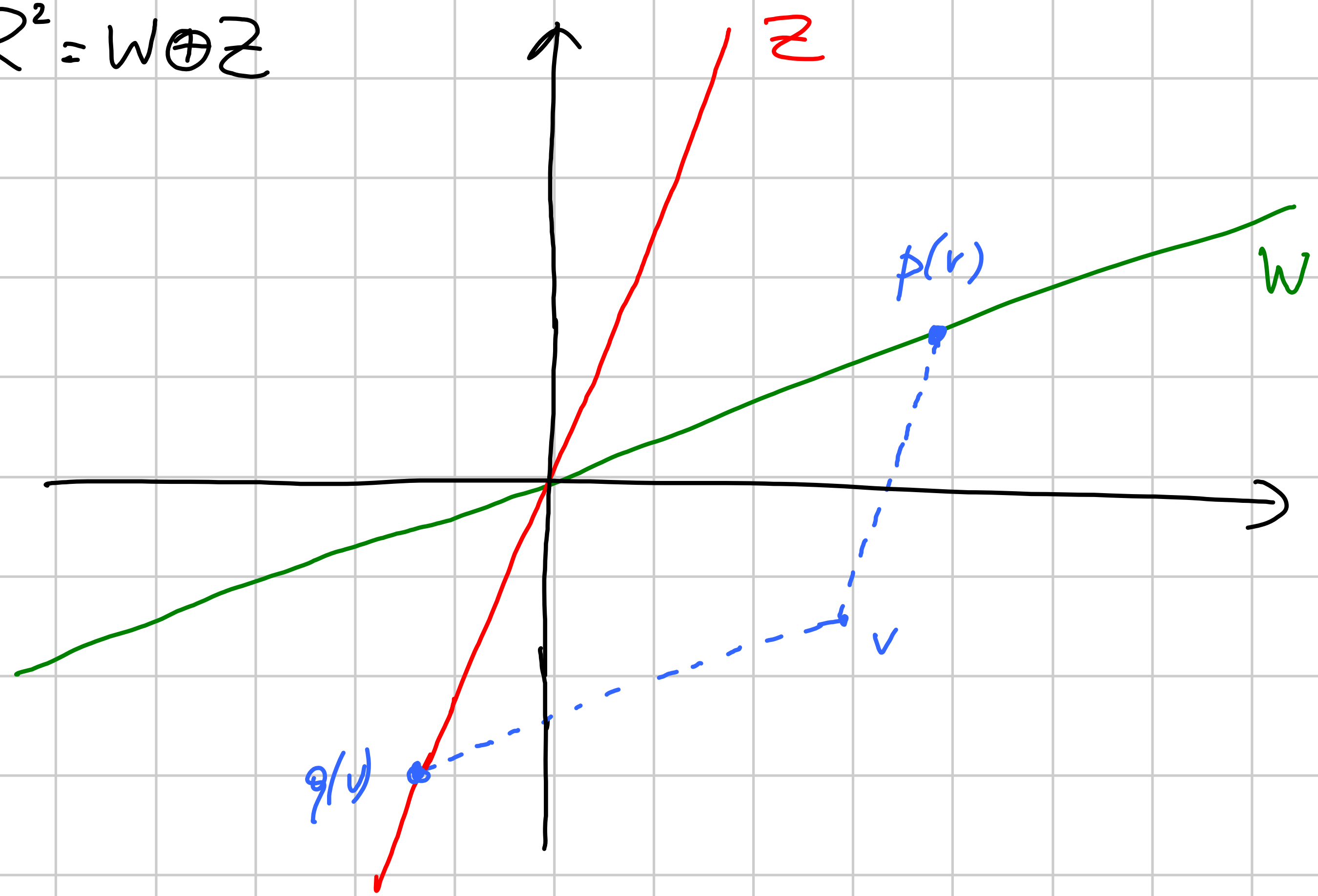
Dim: $\underbrace{\Longrightarrow}$

$$V = W \oplus Z \Longrightarrow \begin{cases} W + Z = V \Longrightarrow \text{ogni } v \text{ si scrive come } v = w + z \\[1em] W \cap Z \cap \{0\} \Longrightarrow \text{se } v = w_1 + z_1 = w_2 + z_2 \text{ ho} \\ \qquad \underset{\in W}{w_1 - w_2} = \underset{\in Z}{z_2 - z_1} \Longrightarrow \\ \qquad w_1 - w_2 = z_2 - z_1 \in W \cap Z = \{0\} \\ \qquad \Longrightarrow w_1 = w_2,\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

Esercizio _

Def: se $V = W \oplus Z$ definiamo le proiezioni su W e su Z associate alla decomposizione $V = W \oplus Z$ le mappe $p, q : V \to V$ dove se $v \in V$ e scrivo $v = \underset{\in W}{w} + \underset{\in Z}{z}$ pongo $p(v) = w$ e $q(v) = z$ _

Es.: $V = \mathbb{R}^2 = W \oplus Z$



Prop: p e q sono lineari. Inoltre:

(i) $p \circ p = p$, $q \circ q = q$

(ii) $p \circ q = q \circ p = 0$

(iii) $p + q = id_V$

(iv) $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Im}(q) = Z$, $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(q) = W$.

Dim: linearità. Suppongo $p(v_1) = w_1 \quad q(v_1) = z_1$

$p(v_2) = w_2 \quad q(v_2) = z_2$

cioè $v_1 = w_1 + z_1 \qquad w_1 \in W \quad z_1 \in Z$

$v_2 = w_2 + z_2 \qquad w_2 \in W \quad z_2 \in Z$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = \underbrace{(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)}_{\in W} + \underbrace{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}_{\in Z}$$

$$\Rightarrow p(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 p(v_1) + \lambda_2 p(v_2)$$

$$\Rightarrow q(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 = \lambda_1 q(v_1) + \lambda_2 q(v_2)$$

OK

•) $p \circ p = p$ $\quad p(v) = w \Rightarrow w \in W, \; v = w + z \quad z \in Z;$

$(p \circ p)(v) = p(w) \; ; \quad w = \underbrace{w}_{\in W} + \underbrace{0}_{\in Z}$

$\Rightarrow p(w) = w$ dunque $(p \circ p)(v) = p(v)$ _

Ciò prova anche che $Im(p) = W$.

$\bullet\bullet)$ $p \circ q = 0$ $\qquad q(v) = z$ significa $v = w + z$, $w \in W$, $z \in Z$

$\Rightarrow p(q(v)) = p(z)$; ma $z = \underset{\in W}{0} + \underset{\in Z}{z}$

$\Rightarrow \boxed{p(z) = 0}$.

$\therefore)$ $(p+q)(v) = p(v) + q(v)$

se $v = w + z$ ho $p(v) = w$, $q(v) = z$

$\Rightarrow w + z = v$

$\Rightarrow (p+q)(v) = v \quad \forall v \in V \quad \Rightarrow \quad p+q = id_V$.

ii) Resta da vedere che $Ker(p) = Z$.

Già visto che se $z \in Z$ ho $p(z) = 0$ cioè $z \in Ker(p)$

Viceversa, se $p(v) = 0$ ho $v = \underbrace{p(v)}_{=0} + \underbrace{q(v)}_{\in Z}$

$\Rightarrow v \in Z$. $\blacksquare$

Es: $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ $Z = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

$W \cap Z = \{0\}$

$$\Longrightarrow \dim(W+Z) \underset{\text{Grassman}}{=} \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\dim(W)}} + \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\dim(Z)}} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\dim(W \cap Z)}} = 2$$

$\Rightarrow W + Z = \mathbb{R}^2$ (In generale: se $W \cap Z = \{0\}$ e $\dim W + \dim Z = \dim V$ si ha $V = W \oplus Z$)

Calcoliamo le proiezioni associate p, q.

Dato $x \in \mathbb{R}^2$ vogliamo scrivere

$$x = w + z$$

$$w = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$z = \beta \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sarà $p(x)$ sarà $q(x)$

Devo risolvere $\begin{cases} 7\alpha + 4\beta = x_1 \\ 3\alpha - \beta = x_2 \end{cases}$ rispetto ad α, β.

$$\alpha = \frac{x_1 + 4x_2}{21} \qquad \beta = \frac{3x_1 - 7x_2}{21}$$

$$\Rightarrow p(x) = \frac{x_1 + 4x_2}{21} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad q(x) = \frac{3x_1 - 7x_2}{21} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Es. $V = \mathbb{R}^3$ $\quad W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$

$Z = \{x \in \mathbb{R}^3 : 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$

$\dim W = 1$ $\quad \dim Z = 2$ $\left(\text{base } \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

Per provare che $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ basta vedere che $W \cap Z = \{0\}$:

$v \in W \cap Z$ solo se $v = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ e soddisfa $5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$

$\Longrightarrow 5(2\lambda) - (+\lambda) - 2(-7\lambda) = 0$

$\Longrightarrow 23\lambda = 0 \Longrightarrow \lambda = 0 \Longrightarrow v = 0$

Cerco le proiezioni su W e Z di $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$:

devo scrivere

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{w} \quad + \quad z \in Z$$

deve essere

$$w = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

deve soddisfare

$$5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

cioè devo trovare λ in modo che

$$\begin{pmatrix}3\\2\\-8\end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix}2\\1\\-7\end{pmatrix} \quad \text{soddisfi} \quad 5x_1 - x_2 - 2x_3 = 0$$

ovvero
$$5\cdot(3-2\lambda) - (2-\lambda) - 2(-8+7\lambda) = 0$$
$$29 - 23\lambda = 0 \qquad \lambda = \frac{29}{23}$$

$$\Rightarrow p\begin{pmatrix}3\\2\\-8\end{pmatrix} = \frac{29}{23}\begin{pmatrix}2\\1\\-7\end{pmatrix}$$

$$q\begin{pmatrix}3\\2\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\-8\end{pmatrix} - \frac{29}{23}\begin{pmatrix}2\\1\\-7\end{pmatrix} = \dots$$

Prop: Se $p : V \to V$ soddisfa $p \circ p = p$ allora p è una proiezione associata a $V = W \oplus Z$ dove $W = \mathrm{Im}(p)$
$Z = \mathrm{Ker}(p)$.

Dim: Poniamo $W = \mathrm{Im}(p)$, $Z = \mathrm{Ker}(p)$.
Dobbiamo provare:

$V = W + Z$: $v = p(v) + (v - p(v))$

$$\underbrace{p(v)}_{\in\, \mathrm{Im}\, p} \qquad \underbrace{(v - p(v))}_{\in\, \mathrm{Ker}(p) \text{ poiché}}$$

$$p(v - p(v)) =$$

$$= p(v) - p(p(v)) = p(v) - p(v) = 0$$

$W \cap Z = \{0\}$: se $v \in W \cap Z$ devo avere

$$v = p(x) \quad e \quad p(v) = 0$$

$$\Longrightarrow 0 = p(v) = p(p(x)) = p(x) = v$$

Ho provato che $V = W \oplus Z$ e che la proiezione su V è p.

$\boxtimes$