Es Algebra Lineare 23/10/2014

Es 9 Foglio 2

(b) $V = \mathbb{R}^3$

$W = \{ x : 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \}$

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$5 - 2 - 3 = 0$ ✓ $10 + 2 - 4 \neq 0$ $w_2 \notin W$

$\Rightarrow$ w_1, w_2 non sono generatori

(c) $W = \{x : 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\}$ $\circledast$

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$3 - 2 - 1 = 0$ ✓ $3 - 10 + 1 = 0$ ✓

$\Rightarrow w_1, w_2 \in W$

$w \in W$ $w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$x_3 = -3x_1 + 2x_2$

$w = x_1 w_1 + x_2 w_2$

$$w = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scrivo w come comb. lineare di w_1, w_2

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \, 3 \\ x_2 = \lambda_1 \, 1 + \lambda_2 \, 5 \end{cases}$$

$$x_1 - x_2 = \lambda_2 \, (3 - 5)$$

$$x_1 - x_2 = \lambda_2 \, (-2)$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

$$x_1 = \lambda_1 + 3 \left(-\frac{1}{2} (x_1 - x_2) \right)$$

$$\lambda_1 = 3\left(+\frac{1}{2}(x_1 - x_2)\right) + x_1$$

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}x_1 - \frac{3}{2}x_2$$

$$x_3 = \lambda_1(-1) + \lambda_2(1)$$

è automaticamente soddisfatta perché w_1, w_1, w_2 soddisfano $(*)$

. Quindi w_1, w_2 generano e, per ogni $w \in W$ $\exists!$ espressione di w come combinazione lineare di w_1, w_2 (che sono base)

(d) $W = \{ x : 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0 \}$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad w_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$4 + 6 - 10 = 0$ ✓ $\qquad 4 - 9 + 5 = 0$ ✓ $\qquad 8 - 3 - 5 = 0$ ✓

$\Rightarrow w_1, w_2, w_3 \in W$

$w_1 + w_2 = w_3$ Sono dipendenti

$0 = w_1 + w_2 - w_3$

0 non ha un'! scrittura come combinazione lineare

Ora verifichiamo se

w_1, w_2, w_3 generano

Grazie a ⊛ ci basta verificare se

w_1, w_2 generano ~

Dell' eq. di W abbiamo che

$x_3 = \frac{1}{5}(4x_1 + 3x_2)$ e quindi

risolvo $w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ guardando solo le prime due coord.

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_1 \, 1 + \lambda_2 \, 1 \\ x_2 = \lambda_1 \, 2 + \lambda_2 (-3) \end{cases}$$

(solito il calcolo) $\exists !$ soluzione

$\lambda_1 = \dots$

$\lambda_2 = \dots$ $\Rightarrow$ w_1, w_2 generano (e sono base)

e dunque anche w_1, w_2, w_3 generano (ma non sono più base).

Foglio 3

Es. 1

(a) $\{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0\}$

$$x_3 = \frac{1}{4}(7x_1 + 5x_2)$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ determino a_1, a_2 : $a_1 = \frac{7}{4}$, $a_2 = \frac{5}{4}$

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 7/4 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/4 \end{pmatrix}$ sono indipendenti

(perché $\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = 0$ ha ! sol.)

e generano.

(b) $\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$

(i) $x_1 = -\frac{2}{3} x_2 + \frac{5}{3} x_3$ (dalla 1ª eq.)

sostituisco nella 2ª eq.

$$-4\left(-\frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3\right) + x_2 + 7x_3 = 0$$

$$\frac{11}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0 \qquad 11x_2 + x_3 = 0$$

(ii) $x_2 = -\frac{1}{11}x_3$

fissato x_3 da (ii) trovo x_2

da (i) trovo x_1

$$w = \begin{pmatrix} 53/33 \\ -1/11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$-2/33 + 5/3 = \frac{53}{33}$$

W è sp di dim 1 e $\{w\}$ è base perché genera ed è (ovviamente) indip.

(c) 3 eq. sono dipendenti?

sì: ne scarto una e faccio come (b)

no: $W = \{0\} \Rightarrow$ W ha una base vuota (è generato da 0 vettori).

Es 2 (a)

$V = \mathbb{R}^4$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Completo a base

v_1, v_2 sono indipendenti perché lo sono (per esempio) guardando la proiezione sulle prime due coord.

cioè $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ sono indip.

v_1 e v_2 sono indipendenti se e solo se

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$ ha ! sol $(= 0)$

ma anche $\lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

ha ! sol. $\Rightarrow$ v_1, v_2 sono indip.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dico che v_1, v_2, v_3, v_4 sono indip.

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} 4\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \end{array}} \longrightarrow \lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = 0 \\ \dots\lambda_1 + \dots\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \qquad \lambda_3 = 0 \\ \dots\lambda_1 + \dots\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \qquad \lambda_4 = 0 \end{array}\right.$$

(c) $V = \{ x \in \mathbb{R}^4 : 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \}$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad v_1 \in V$$

$$x_4 = 2x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{5}{2}x_3$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\\cancel{x}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\\cancel{xx}\end{pmatrix} \quad \text{cioè}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\3/2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\5/2\end{pmatrix} \quad \text{sono indipendenti} -$$

e (come visto nell'es. precedente)

bastano a generare $\Rightarrow$ sono base