Esercitazioni Alg. Lin. 28/10/2014

Foglio 2

Es. 7

(a) $v = 1 - 2t + 3t^2$ $\qquad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\qquad w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$w_1 = 4 + t - t^2$

$w_2 = -3 + 2t + t^2$

$$v = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$$

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 (-3) & (1) \\ -2 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 (2) & (2) \\ 3 = \lambda_1 (-1) + \lambda_2 (1) & (3) \end{cases}$$

$(1) + (2) + (3)$

$$2 = \lambda_1 \cdot 4 + \lambda_2 \cdot 0 \qquad 2 = \lambda_1 \cdot 4 \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1/2 \\ -2 = 1/2 + \lambda_2 \cdot 2 \\ 3 = -1/2 + \lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \quad -\frac{5}{2} = \lambda_2 \cdot 2 \qquad \lambda_2 = -\frac{5}{4}$$

$$3 \neq -\frac{1}{2} + \left(-\frac{5}{4}\right) \quad \text{NON } \exists \text{ SOLUZIONE}$$

$$v \notin \text{Span}(w_1, w_2)$$

Es 8 (a)

$$v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dalle coordinate nelle posiz. e trovo:

$$3 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 + \lambda_3 \cdot 1 \Rightarrow \lambda_3 = 3$$

$$-1 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \, 0 + \lambda_3 \cdot (-1)$$

$$-1 + 3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$$

e quindi, sostituendo, scrivo le eq. per le altre due coord.:

$$\begin{cases} 2 = 2 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \, 0 \\ 7 = 2(-1) + \lambda_2 \, 2 + \lambda_3 \cdot 0 \end{cases} \qquad (\lambda_1 = 2)$$

$\Longrightarrow \quad -2 = \lambda_2$, ma, sostituendo nell'ultima eq. trovo

$$7 \neq -2 + (-2)\cdot 2$$ NON C'È SOLUZIONE.

(c) $\quad v = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

$w_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot 3 \\ 3 = \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \, 1 + \lambda_4 \cdot 2 \\ 0 = \lambda_1 (-1) + \lambda_2 \, 1 + \lambda_3 \cdot 1 + \lambda_4 (-1) \\ 4 = \lambda_1 \, 3 + \lambda_2 \, 1 + \lambda_3 \cdot 4 \end{cases}$$

Scrivo $(2) + 2 \cdot (3)$ al posto di (2)

$$3 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \, 3 + \lambda_3 \cdot 3 + \lambda_4 \cdot 0$$

CI SIAMO RIDOTTI A 3 INCOGNITE ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) E 3 eq. SE RISOLVIAMO e troviamo λ_1, λ_2 e λ_3

Possiamo usare 3 e ricaviamo λ_4 :

$$\lambda_4 = -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\begin{cases} 3 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot 3 \\ 3 = \lambda_2 3 + \lambda_3 \cdot 3 \\ 4 = \lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 \cdot 4 \end{cases} \longrightarrow \left.\begin{matrix} \text{da } \lambda_2, \lambda_3 \\ \text{ricavo} \\ \lambda_1 \end{matrix}\right\}$$

$$-3 \ 1 + 3$$

$$-5 = 0 \cdot \lambda_1 + (-5) \cdot \lambda_2 + (-5) \cdot \lambda_3$$

$\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 0$

oppure

$\lambda_2 = 0$ e $\lambda_3 = 1$ risolvono

$v \in \mathrm{Span}(w_1, w_2, w_3, w_4)$

non ho ! scrittura come comb lineare

<u>Es. 9</u> (a)

$V = \mathbb{R}^3$ $W = \{ x : x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \}$

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$w_1, w_2, w_3 \in W$? Sì

Per w_1 $\quad -1 + 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0$ ✓

w_2 $\quad 3 + 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = 0$ ✓

w_3 $\quad 0 + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$ ✓

GENERANO? riscrivo l'eq. di W.

$$x_2 = -\frac{1}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_3$$

Se $x_1 = 1$, $x_3 = 0$ $\Rightarrow$ $x_2 = -\frac{1}{3}$

$w_2 \rightarrow$ $x_1 = 3$, $x_3 = 0$ $\Rightarrow$ $x_2 = -1$

$x_1 = 0$, $x_3 = 1$ $\Rightarrow$ $x_2 = \frac{2}{3}$

$w_3 \rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_3 = 3$ $\Rightarrow$ $x_2 = 2$

un qualsiasi vettore di W $\longrightarrow$ $x_1 = \lambda_1$, $x_3 = \lambda_2$ $\Rightarrow$ $x_2 = -\frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2$

$$* = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -\frac{1}{3}\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -\frac{1}{3}\lambda_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3}\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda_1 \cdot \frac{1}{3} w_2 + \lambda_2 \cdot \frac{1}{3} w_3$$

Ogni vettore $w \in W$ si scrive come $*$ per opportuni λ_1, λ_2 e quindi è combin. lineare di w_2 e w_3

$\Rightarrow$ w_1, w_2, w_3 generano perché

w_2 e w_3 generano e

$$w_1 = \frac{1}{3} w_2 + \frac{2}{3} w_3$$

w_1 e $\frac{1}{3} w_2 + \frac{1}{3} w_3$ sono due espress

(come comb lineari di w_1, w_2, w_3) dello

stesso vettore $\Rightarrow$ non ho in generale

un'unica espressione