

Alg. Lim. 28/10/14

$f: V \rightarrow W$ lineare se conserva le operazioni;

(cioè rispetta le comb. lin.:

$$f(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2)$$

Esempio: Transposizioni $M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{n \times m}(\mathbb{R})$
 $A \mapsto {}^t A$

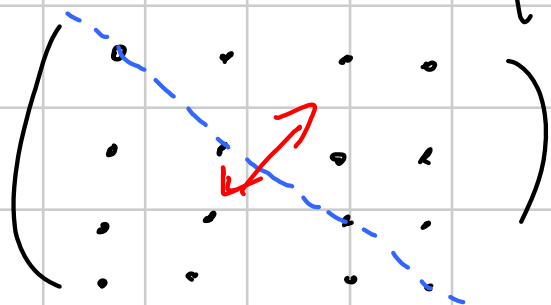
$$({}^t A)_{ij} = (A)_{ji}$$

cioè "scambio righe con colonne e vice."

matrice
trasposta di A

$${}^t \begin{pmatrix} \sqrt{3} & e \\ -2 & 4 \\ 5 & -19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -2 & 5 \\ e & 4 & -19 \end{pmatrix}$$

Nel caso $m=n$ (quadrato) : è riflessione risp. a
diagonale principale:



$${}^t \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & e & \pi \\ 9 & -1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 9 \\ 3 & e & -1 \\ 4 & \pi & 7 \end{pmatrix}$$

Oss: la transp. è lineare:

$${}^t(\lambda_1 \cdot A_1 + \lambda_2 \cdot A_2) = \lambda_1 \cdot {}^t A_1 + \lambda_2 \cdot {}^t A_2.$$

E_S: $f: \mathcal{F}(\{a, b, c\}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(\alpha) = \begin{pmatrix} 3\alpha(a) - 7\alpha(b) \\ 5\alpha(b) - 9\alpha(c) \end{pmatrix}$$

f lineare:

$$f(\alpha + \beta) = \begin{pmatrix} 3(\alpha + \beta)(a) - 7(\alpha + \beta)(b) \\ 5(\alpha + \beta)(b) - 9(\alpha + \beta)(c) \end{pmatrix}$$

~~Yes.~~

$$= \begin{pmatrix} 3(\alpha(a) + \beta(a)) - 7(\alpha(b) + \beta(b)) \\ 5(\alpha(b) + \beta(b)) - 9(\alpha(c) + \beta(c)) \end{pmatrix}$$

$$f(\alpha) + f(\beta) = \begin{pmatrix} 3\alpha(a) - 7\alpha(b) \\ 5\alpha(b) - 9\alpha(c) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3\beta(a) - 7\beta(b) \\ 5\beta(b) - 9\beta(c) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3\alpha(a) - 7\alpha(b) + 3\beta(a) - 7\beta(b) \\ 5\alpha(b) - 9\alpha(c) + 5\beta(b) - 9\beta(c) \end{pmatrix}$$

OK

$$\underline{E_S}: f: \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \rightarrow (\mathcal{F}(\{a, b\}, \mathbb{R}))$$

$$f(k_0 + k_1 t + k_2 t^2): \quad \begin{aligned} a &\longmapsto k_0 + 9k_2 \\ b &\longmapsto 5k_0 + k_1 - 3k_2 \end{aligned}$$

E linear:

$$f(\lambda \cdot p(x)) = \lambda \cdot f(p(x))$$

↑
prod. tra
num. e pol.

↑
prod. tra num.
e funzione

A sx e a dx di $\nexists$ ci sono funzioni $\{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(1 \cdot (k_0 + k_1 t + k_2 t^2)) = 1(1 \cdot k_0 + 1 \cdot k_1 t + 1 \cdot k_2 t^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \mapsto 1 \cdot k_0 + 9 \cdot 1 \cdot k_2 \\ b \mapsto 5 \cdot 1 \cdot k_0 + 1 \cdot k_1 - 3 \cdot 1 \cdot k_2 \end{array} \right.$$

$$1 \cdot f(k_0 + k_1 t + k_2 t^2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a \mapsto 1 \cdot (k_0 + 9k_2) \\ b \mapsto 1(5k_0 + k_1 - 3k_2) \end{array} \right. \quad \underline{\underline{OK}}$$

Monale : sono lineari di certo e funzioni da
 vettori colonna / polinomi / funzioni / matrici in
 spazi dello stesso tipo in cui operi

componenti / coeff del. poli / valori della funt. / entrate
del vett. delle matrici

del valore in un punto sono funzioni polinomiali oppure
di 1° grado

di compodel / coeff. del / ... / ...
vett poli

LINEARI

del punto -

OPPURE: MASCHERATE

E₅: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ $f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \log(e^{5x_1 - 7x_2}) \\ \pi \cdot x_1 + \sqrt{3}x_2 \end{pmatrix}$

Es: considero $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_4 + (x_1 + x_3)^{577} \\ 6x_1 - x_3 + \sin(x_1 + x_2 - x_4) \end{pmatrix}$$

NON è lineare. Però:

$$\text{se } W = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array}$$

e definisco $g: W \rightarrow \mathbb{R}^2$ come $g(x) = f(x) \quad \forall x \in W$
(diremo: g è la restrizione di f a W).

Nota che: $\frac{1}{6}(I+II): x_1 + x_3 = 0$

$-\frac{1}{3}(2 \cdot I - II): x_1 + x_2 - x_4 = 0$

$\Rightarrow$ Su W ho $f(x) = h(x)$ con $h: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$h(x) = \begin{pmatrix} 3x_2 - 2x_4 \\ 6x_1 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Ora h è lineare $\Rightarrow$ anche g è lineare.

_____ o _____

Sia $f: V \rightarrow W$ lineare qualsiasi.

$$\underline{\text{Oss:}} \quad \text{Im}(f) = f(V)$$

$$= \{ f(v) : v \in V \}$$

$$= \{ w \in W : \exists v \in V \text{ con } f(v) = w \}$$

$\bar{e}$ un sbsp. vett. di W ;

$$w_1, w_2 \in \text{Im}(f) \quad \text{cioè} \quad w_1 = f(v_1), \quad w_2 = f(v_2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in \text{Im}(f) \quad _$$

Def: chiamo nucleo di f

$$\text{Ker}(f) = \{v \in V : f(v) = 0\} -$$

Oss: $\text{Ker}(f)$ è un ssp. vett. di V . Infatti:

$$v_1, v_2 \in \text{Ker}(f) \quad \text{cioè} \quad f(v_1) = f(v_2) = 0 \quad \text{ha}$$

$$f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \in \text{Ker}(f) -$$

Ci chiediamo se una data $f: V \rightarrow W$ lin. sia

iniettiva, suriettiva o sempre nulla, rispondendo
tramite $\text{Im}(f)$ e $\text{Ker}(f)$.

Qss: $f \text{ sur.} \iff \text{Im}(f) = W$;

$f = 0 \iff \text{Im}(f) = \{0\} \iff \text{Ker}(f) = \bar{V}$.

Prop: $f \text{ iniettiva} \iff \text{Ker}(f) = \{0\}$.

Dim: $\implies$ ovvia perché:

$$\text{Ker}(f) = f^{-1}(\{0\}) \quad (\text{def. di Ker})$$

So che $0 \in \text{Ker}(f)$; se f è iniettiva ho
che $f^{-1}(\{0\})$ è al più un punto $\Rightarrow$ è $\{0\}$.

$\Leftarrow$: Supponiamo $\text{Ker}(f) = \{0\}$.

Prendiamo $v_1, v_2 \in V$ t.c. $f(v_1) = f(v_2)$

e dimostriamo che necessariamente $v_1 = v_2$.

Infatti: $f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0$

$$\Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 \in \text{Ker}(f)$$

ma $\text{Ker}(f) = \{0\}$ dunque $v_1 - v_2 = 0$ cioè $v_1 = v_2$ - $\square$

Teo (Formula della Dimensione) :

se $\dim(V) < +\infty$ allora

$$\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(V)$$

(Dimo: Domani) -

Con: Sia $f: V \rightarrow W$ lin. con $\dim V = n, \dim W = m$.

- 1) Se $n < m$ la f non può essere suriettiva
- 2) Se $n > m$ la f non può essere iniettiva
- 3) Se $n = m$ ho f iniettiva $\Leftrightarrow f$ suriettiva.

Dim: 1) $\underbrace{\dim(\text{Ker } f)}_{=0} + \dim(\text{Im } f) = \underbrace{\dim(V)}_n$

↑
al più n
 $\Rightarrow$ meno di n

$$2) \dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(V)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \underbrace{\begin{array}{c} \circ \\ W \\ \parallel \\ m \end{array}} \\ n \end{array}$$

almeno $n - m > 0$

quindi $\text{Ker } f \neq \{0\} \Rightarrow f$ non iniettiva

Interpretazioni:

1) con uno spazio più piccolo non posso coprire in modo lineare uno più grande

(attenzione: esistono mappe $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

bipettive $\forall n, m$ — non lineari)

2) Infilando in modo lineare uno sp. più grande in uno più piccolo dev. "fare delle pieghe" —

Dimo 3: $\dim(\text{Ker } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(V)$

iniettiva:

↑
fa 0

↑
suriettiva: fa m
(perché $m = n$)

$\overset{||}{m}$

sono equivalenti _



Oss: la (3) è analoga a :

"metà" def. di base implica l'altra metà se
il numero di veti è pari."

Nota:

$f: V \rightarrow W$ ^{può essere} biettiva solo $m=n$;

ricorda (3) dice:

"se $m=n$ mezza biettività $\Rightarrow$ tutta _"