

Alg. Lin. 26/11/14

$E \subset V$ è ssp. aff. se $E = v + W$
con $v \in V$, $W \subset V$ ssp. vett.

$$(a) \quad v + W = v' + W' \Rightarrow W = W'$$

Dimo: provo che $W \subset W'$ (ricorrenza analogo).

$$v = v + 0 \in v + W \Rightarrow v \in v' + W' \Rightarrow v = v' + w'_0, \quad w'_0 \in W'$$

Prendo $w \in W$ e dimostro che $w \in W'$:

$$v+w \in v+W \Rightarrow v+w \in v'+W' \Rightarrow v+w = v'+w'$$

$$w' \in W'$$

$$\Rightarrow v+w = v-w'_0+w' \Rightarrow w = -w'_0+w'$$

$$\Rightarrow w \in W' \quad \square$$

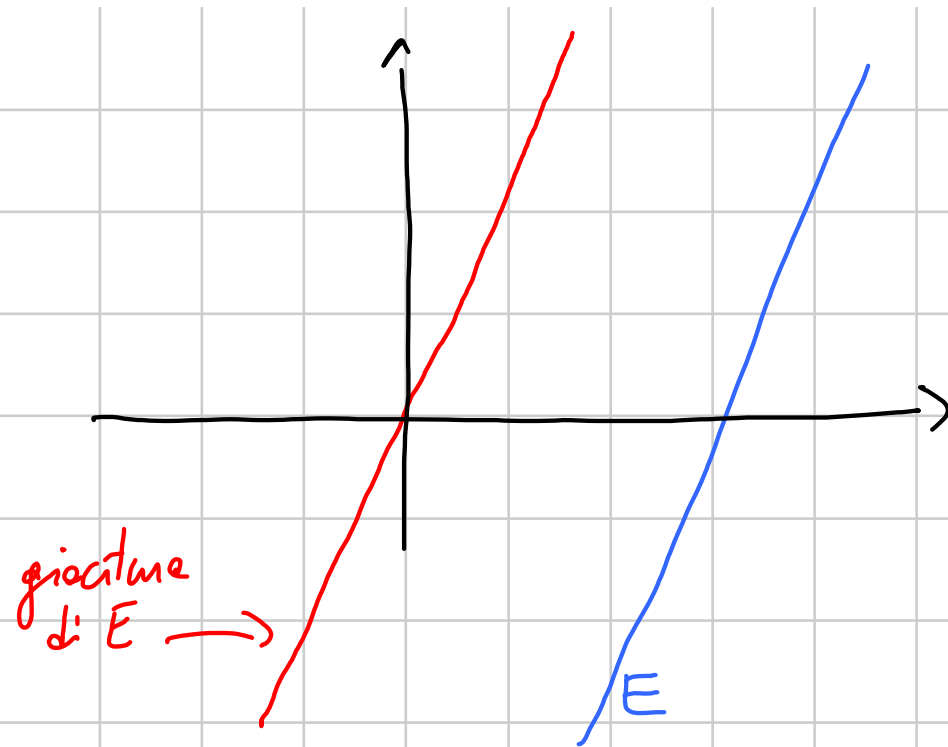
$$(b) \quad v+W = v'+W \Leftrightarrow v' \in v+W$$

Dimo: $\Rightarrow \quad v' = v' + 0 \in v' + W = v + W$

$\Leftarrow$ sia $v' = v + w_0$; allora $v' + W = v + \underbrace{w_0 + W}_W$.

$\square$

Def: se $E = v + W$ chiamiamo W la giacitura di E ; poniamo $\dim(E) = \dim(W)$.



$$\dim(E)=1$$

Sottospazi affini di $\mathbb{R}^n$.

Chiamiamo presentazione parametrica di E
 stsp. aff. di $\mathbb{R}^n$ la scrittura

$$E = v_0 + \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$$

$$= \{ v_0 + t_1 w_1 + \dots + t_k w_k : \underbrace{t_1, \dots, t_k}_{\text{parametri}} \in \mathbb{R} \}$$

*i k parametri
della presentazione*

Oss: ogni E con $\dim(E) = d$ ammette una
 presentazione param. con d parametri (o più di d):

se $E = v_0 + \bar{W}$ basta prendere una base $w_1, \dots, w_d$ di $\bar{W}$. Ripetendo uno dei w_j si ottengono più parametri.

Es: retta in $\mathbb{R}^2$: $E = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$
con $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ma anche:

$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} : t_1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} aa \\ ab \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} : t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$
(parametri sovrabbondanti).

Es: retta in $\mathbb{R}^3$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$$

con $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es: piano in $\mathbb{R}^3$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} : t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

con $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ lin. indep. cioè $\text{rank} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 2$

cioè uno dei det delle matrici

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \quad \bar{e} \neq 0.$$

Oss: Visto che l'insieme delle soluz. di $A \cdot x = b$
se non $\emptyset$, $\bar{e}$ è del tipo $x_0 + \text{Ker}(A)$

con x_0 soluz. particolare. Dunque

$\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b\}$ è un stsp. aff. di $\mathbb{R}^n$

di $\dim = \dim(\text{Ker } A) = n - \dim(\text{Im}(A))$

$= n - \text{rank}(A).$

Def: Chiamiamo presentazione cartesiana di un stsp affine $E \subset \mathbb{R}^n$ la scrittura

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b\}$$

talvolta abbreviate come $E: A \cdot x = b$

Prop: ogni $E \subset \mathbb{R}^n$ stsp. aff. di dim d ha presentazioni cartesiane con $n-d$ equazioni (e anche con qualsiasi numero

$\geq n-d$ di equazioni) _

Oss : la presentazione cartesiana ha senso solo
per $E \subset \mathbb{R}^n$ (non $E \subset V$) _

Es : retta in $\mathbb{R}^2$ $\dim = 1 \Rightarrow 2 - 1 = 1$ equaz

$$E : \alpha x + \beta y = \gamma \quad \text{con } (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

Es : retta in $\mathbb{R}^3$ $\dim = 1 \Rightarrow 3 - 1 = 2$ equaz

$$E: \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \end{cases}$$

con $\text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 2$ cioè una delle

$\begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$ ha $\det \neq 0$.

E _s: piano in $\mathbb{R}^3$: $\dim = 2 \Rightarrow 3 - 2 = 1$ eq~~ue~~

$$E: \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

con $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ -

Dimo (P_{prop}) : Sia $E \in \mathbb{R}^m$ stsp. $\mathcal{A}$

cioè $E = v_0 + W$, dim $W = d$ -

Cerco $A \in M_{\underbrace{(m-d) \times m}}(\mathbb{R})$ t.c. $\text{Ker } A = W$;

$m-d$ equazioni in m incognite

se trovo tale A basterà porre $b = A \cdot v_0$ e si ha

$E : A \cdot x = b$ -

Scego una base $w_1, \dots, w_d$ di W e la completo a una base $w_1, \dots, w_d, v_{d+1}, \dots, v_m$ di $\mathbb{R}^m$.

Definisco $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-d}$ lineare, l'unica con

$$f(w_j) = 0 \quad j = 1, \dots, d$$

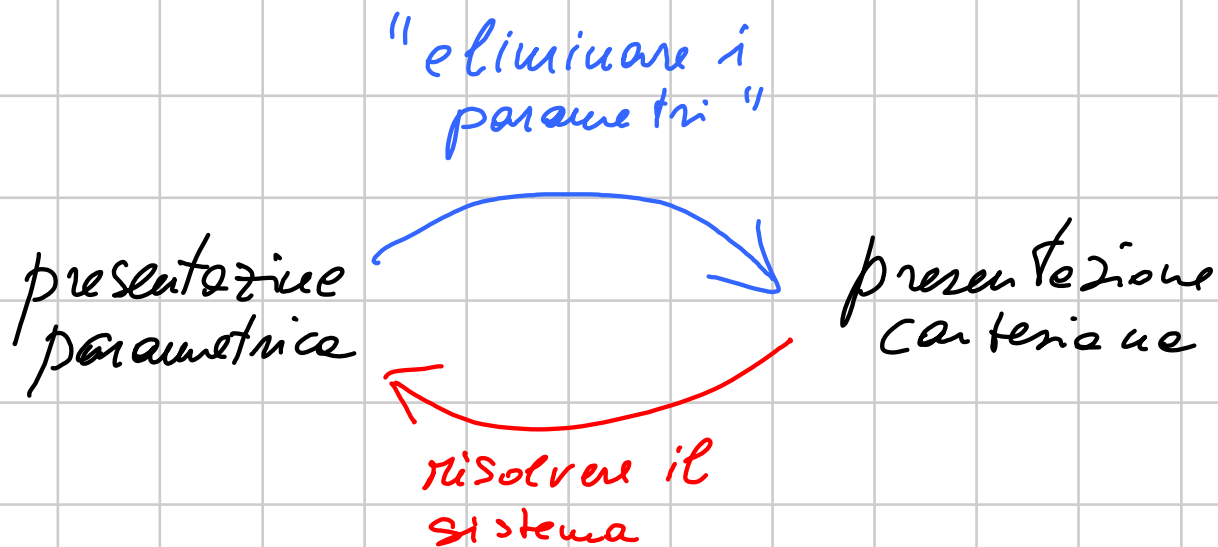
$$f(v_i) = e_{i-d} \quad i = d+1, \dots, m$$

Chiaro che $W \subset \text{Ker } f$, anzi $W = \text{Ker } f$.

One basta porre $A = [f]_{\sum^{(m-d)} \sum^{(m)}}$ -



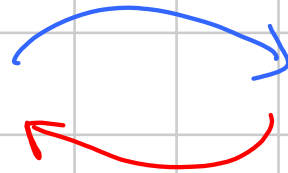
Si posso dunque esprimere sempre i parametri



Vediamo i parametri per rette in $\mathbb{R}^2$ e rette e piani in $\mathbb{R}^3$

Gerade in $\mathbb{R}^2$:

$$E = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



$$E: \alpha x + \beta y = \gamma$$



:

$$E: b x - a y = b \cdot x_0 - a \cdot y_0$$



:

$$E = \frac{\gamma}{\alpha^2 + \beta^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \end{pmatrix}$$

$$\underline{Es}: E = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} -9 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow E: 8x + 9y = 101$$

$$\underline{Es}: E: 7x - 4y = 13 \Rightarrow E = \frac{13}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Rette in $\mathbb{R}^3$:

$$E = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad \text{con } \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0$$

$$E: \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \end{cases} \\ \text{con } \text{rank}(\dots) = 2$$

$$\rightarrow \begin{cases} bx - ay = bx_0 - ay_0 \\ cx - az = cx_0 - az_0 \\ cy - bz = cy_0 - bz_0 \end{cases}$$

Sembrano 3 equez, ma sono 2 perché $\text{rank} \begin{pmatrix} b & -a & 0 \\ c & 0 & -a \\ 0 & c & -b \end{pmatrix}$
è 2 e inoltre anche

$$\text{rank} \begin{pmatrix} b & -a & 0 & bx_0 - ay_0 \\ c_0 & & -a & cx_0 - az_0 \\ 0 & c & -b & cy_0 - bz_0 \end{pmatrix} = 2$$

($\Rightarrow$ posso buttare via una delle tre equazioni) -

$$\text{Infatti: } \begin{pmatrix} b & \boxed{-a} & \boxed{0} \\ c & \boxed{0} & \boxed{-a} \\ 0 & c & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & -a & 0 \\ \boxed{c} & \boxed{0} & -a \\ 0 & c & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{b} & -a & \boxed{0} \\ c & 0 & -a \\ \boxed{0} & c & \boxed{-b} \end{pmatrix}$$

$\downarrow$ a^2 $\downarrow$ c^2 $\downarrow$ $-b^2$

$\underbrace{\hspace{15em}}$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{almeno uno dei tre } \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{rank} \geq 2$$

Quotite:

$$\det \begin{pmatrix} b & -a & 0 \\ c & 0 & -a \\ 0 & c & -b \end{pmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0bc + abc = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} b & -a & bx_0 - ay_0 \\ c & 0 & cx_0 - az_0 \\ 0 & c & cy_0 - bz_0 \end{pmatrix} = ac(cy_0 - bz_0) - c \cdot (b(cx_0 - az_0) - c(bx_0 - ay_0)) = 0$$

e analogamente per gli altri due.

$$\underline{\Sigma}_5: E = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E: \begin{cases} 3x + 4z = 41 \\ 3y + 11z = 49 \end{cases}$$

$$\leftarrow \begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = \delta_1 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = \delta_2 \end{cases}$$

* ricerca di una soluz. part. $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ [non lo feci]

* ricerca di un generatore $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ delle soluz. del sistema omogeneo

$$\begin{cases} \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z = 0 \\ \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z = 0 \end{cases}$$

Osservo che $\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} = 0$

$$\alpha_1 \cdot \det \begin{pmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} + \beta_1 \cdot (-\det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}) + \gamma_1 \cdot \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} \text{ } \\ \text{ } \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \begin{pmatrix} \text{ } \\ \text{ } \end{pmatrix} + \gamma_2 \cdot \begin{pmatrix} \text{ } \\ \text{ } \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 x_2 - \beta_2 x_1 \\ -(\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1) \\ \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \end{pmatrix} \text{ genera l'insieme delle soluz.}$$

$\hookrightarrow$ $\bar{c}$ una soluz. ed $\bar{c} \neq 0$
perché
 $\text{rank} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & x_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & x_2 \end{pmatrix} = 2$

$$\underline{\mathcal{L}_S}: \begin{cases} 7x - 2y + 3z = 0 \\ 5x + 4y - 6z = 0 \end{cases}$$

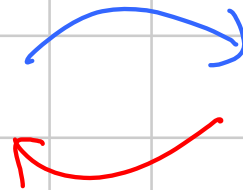
soluz. generate da:

$$\begin{pmatrix} (-2) \cdot (-6) - 4 \cdot 3 \\ -(7 \cdot (-6) - 5 \cdot 3) \\ 7 \cdot 4 - 5 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ - \\ - \end{pmatrix}$$

Piani in $\mathbb{R}^3$

$$E = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\text{con rank} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 2$$



$$E: \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

→ Cerco una equazione $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$

di cui $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ siano soluzioni

(poi basterà porre $\delta = \alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0 = 0$)

$$\underline{Q_{ss}}: \det \begin{pmatrix} \downarrow a_1 & a_1 & a_2 \\ b_1 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \downarrow a_2 & a_1 & a_2 \\ b_2 & b_1 & b_2 \\ c_2 & c_1 & c_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_1 \end{pmatrix} \cdot a_1 + (-\det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix}) \cdot b_1 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \cdot c_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} " \end{pmatrix} a_2 + \begin{pmatrix} " \end{pmatrix} \cdot b_2 + \begin{pmatrix} " \end{pmatrix} c_2 = 0$$

$\Rightarrow$ l'equazione cercata è

$$(b_1 c_2 - b_2 c_1) \cdot x - (a_1 c_2 - a_2 c_1) \cdot y + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \cdot z = 0$$

$$\underline{E_s}: E = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow E: (4 \cdot 6 - (-3) \cdot 2) \cdot x - (7 \cdot 6 - (-3) \cdot 5) y + (7 \cdot 2 - 4 \cdot 5) \cdot z = \dots$$

$$30x + 57y - 6z = 159$$

$$\leftarrow \bar{E}: \alpha x + \beta y + \gamma z = \delta$$

$$\Rightarrow E = \frac{\delta}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} \beta \\ -\alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \\ -\beta \end{pmatrix} \right)$$

Sembra tre
ma posso scartare uno.

Es: $7x - 11y + 4z = 8$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix} \right)$

Esercizi 15/11/14

⑧ Trovare base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ f.c.

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -4x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

I modo: se $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ applico l'ipotesi a e_1, e_2

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot v_1 - 4 \cdot v_2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 \cdot v_1 + 7 \cdot v_2 \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

II modo: $[x]_{\mathcal{B}}$ è quel vettore t.c.

$$x = B \cdot [x]_B$$

Voglio B t.c. $[x]_B = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -4x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot x$$

$$\Rightarrow \text{voglio } B \text{ t.c. } x = B \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot x \quad \forall x$$

$$\text{cioè } B \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = I_2 \quad \text{cioè } B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

⑨ Trovare $\mathcal{B}$ base $L: \{2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\}$ t.c.

$$\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \left[\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Cerco $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ t.c.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v_1 - v_2$$

$$v_1 = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5v_1 - 2v_2$$

$$v_2 = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$