Alg. Lin. 25/11/14

$$\det_n : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$\det(A) \neq 0 \iff \exists A^{-1} \iff$ colonne base di $\mathbb{R}^n$.

Richiamo: $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$:

$\mathrm{rank}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m))$

$=$ dim. stsp. di $\mathbb{R}^m$ generato da colonne di A

= max numero di colonne di A che costituiscono un sistema lin. indip. di vettori.

<u>Cor</u>: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$:

$\text{rank}(A) = n \iff \det(A) \neq 0$.

<u>D</u>ef: diciamo che B è <u>sottomatrice</u> di A se si ottiene da A cancellando alcune righe e/o colonne.

Diciamo che B' è una <u>orlata</u> di B se B si ottiene da B' cancellando una sola riga <u>e</u> una sola colonna.

Es:

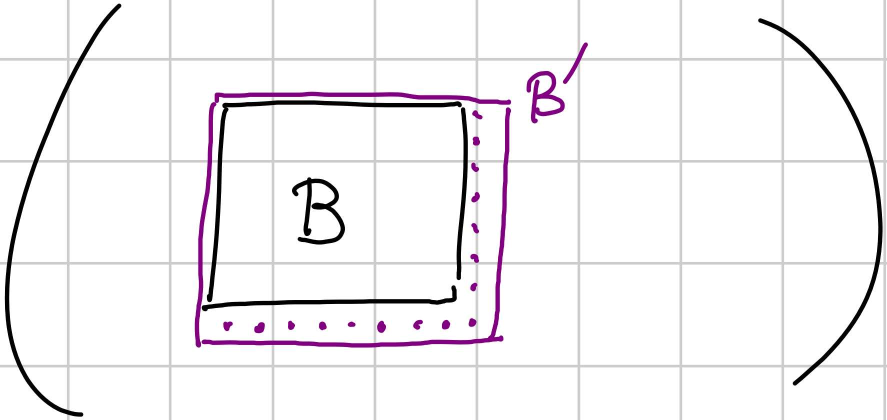
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & \pi & \sqrt{7} \\ -2 & 4 & e & 9 \\ 5 & -7 & 41 & 13 \end{pmatrix}$$

$B = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ -7 & 13 \end{pmatrix}$ è sottomatrice di A.

Le orlate di B in A sono:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & \sqrt{7} \\ -2 & 4 & 9 \\ 5 & -7 & 13 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 3 & \pi & \sqrt{7} \\ 4 & e & 9 \\ 7 & 41 & 13 \end{pmatrix}.$$

Perché orlata:

A 

<u>Oss</u>: se $B \in M_{k\times k}(\mathbb{R})$ ogni sua orlata è in $M_{(k+1)\times(k+1)}$ –

Teo: sia $A \in M_{m \times n}$ e sia r t.c.

- esiste una sottomatrice B $r \times r$ di A con $\det(B) \neq 0$.
- per ogni orlata B' di B si ha $\det(B') = 0$.

Allora $\operatorname{rank}(A) = r$.

Conseguenza: algoritmo per calcolo del rango di A

(Teo: $r=0$?) = In A tutti i coeff sono nulli?

sì $\swarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ no

$\mathrm{rank}(A)=0$ $\qquad$ Fisso un certo coeff. $B^{(1)}$ non nullo;

ora: $(\text{Teo}: r=1)?$ = Le orlate di $B^{(1)}$

hanno tutte det $=0$?

sì $\swarrow$ $\qquad$ $\downarrow$ no

$\mathrm{rank}(A)=1$ $\qquad$ Fisso una sottomat. $B^{(2)} \in M_{2\times 2}$

con det $\neq 0$; $(\text{Teo}: r=2)?$ =

le orlate di $B^{(2)}$ hanno tutte $\det = 0$?

sì

$\mathrm{rank}(A) = 2$

no

Fisso $B^{(3)}$ con $\det(B^{(3)}) \neq 0$ . . .

Punto importante: al j-esimo passo devo calcolare il det solo di tutte le orlate di una fissata $j \times j$, non di tutte le $(j+1)\times(j+1)$.

Es: $A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot & \boxed{\cdot} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot & \boxed{\cdot} \end{pmatrix}$ $\quad B^{(2)},\ \det(B^{(2)}) \neq 0.$

Algo: calcolo il det delle orlate 3×3 di $B^{(2)}$ che sono 6

Invece tutte le 3×3 sono: $4\cdot\binom{5}{3} = 4\cdot 10 = 40.$

Dim: sappiamo: $\exists$ sottomatr. B $r\times r$ con $\det \neq 0$ e tutte le sue orlate hanno $\det \neq 0$. Oss: il rango di A non cambia se

* permuto le colonne (ovvio)
* permuto le righe (sto applicando una mappa $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ lineare invertibile — riordino delle coordinate).

Dunque posso ricondurmi al caso in cui

$$A = \left(\begin{array}{c|c} B & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots \end{array}\right).$$

Ora introduco questa notazione: $B = (v_1, \dots, v_r)$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} v_1 & \cdots & v_r & w_{r+1} & \cdots & w_n \\ \hline a_{r+1,1} & \cdots & a_{r+1,r} & a_{r+1,r+1} & \cdots & a_{r+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,r} & a_{m,r+1} & \cdots & a_{m,n} \end{array} \right)$$

So che $v_1, \dots, v_r$ è una base di $\mathbb{R}^r$

$\Longrightarrow$ $v_1, \dots, v_r$ sono lin. indip

$\Longrightarrow$ le prime r col. A sono lin. indip.

So che $$\det \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_r & w_j \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,r} & a_{k,j} \end{pmatrix} = 0$$

$\forall j > r,\ \forall k > r$.

$\overbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxxxxxx}}$

è l'orlata di B ottenuta aggiungendo riga k e col. j.

Poiché $v_1, \dots, v_r$ è base di $\mathbb{R}^r$ esistono unici coeff $\alpha^j_1, \dots, \alpha^j_r$ t.c.

$$w^j = \alpha^j_1 v_1 + \dots + \alpha^j_r v_r .$$

Per il $\det(\dots) = 0$ ho che la matr. non ha le colonne lin. indip. ma le prime r sì

$\Longrightarrow$ l'ultima colonna è comb. lin. delle prime r

$\Longrightarrow \exists\ \beta_1^{k,j}, \dots, \beta_r^{k,j}$ t.c.

$$\begin{pmatrix} w_j \\ a_{k,j} \end{pmatrix} = \beta_1^{k,j} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ a_{k,1} \end{pmatrix} + \dots + \beta_r^{k,j} \cdot \begin{pmatrix} v_r \\ a_{k,r} \end{pmatrix}$$

dunque $w_j = \beta_1^{k,j} v_1 + \dots + \beta_r^{k,j} \cdot v_r$

Ma ho l'espressione unica $\Longrightarrow \beta_i^{k,j} = \alpha_i^j$

cioè $\beta_i^{k,j}$ non dipende da k; allora

$$a_{k,j} = \alpha_1^j \begin{pmatrix} v_1 \\ a_{k,1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r^j \cdot \begin{pmatrix} v_r \\ a_{k,r} \end{pmatrix} \quad \forall k > r$$

$$\Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} w_j \\ a_{r+1,j} \\ \vdots \\ a_{m,j} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{la } j\text{-esima} \\ \text{colonna di } A \\ (j>r)}} = \alpha_1^j \begin{pmatrix} v_1 \\ a_{r+1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_r^j \cdot \begin{pmatrix} v_r \\ a_{r+1,r} \\ \vdots \\ a_{m,r} \end{pmatrix}$$

le prime r colonne di A

$\Longrightarrow$ rank$(A) \leq r$, ma (visto prima)

rank$(A) \geq r$ $\longrightarrow$ OK.

$\blacksquare$

———— o ————

Sottospazi affini

<u>Def</u>: Sia V uno sp. vett. Un sottoinsieme E di V si dice sottosp. affine se esisto $v \in V$ e $W \subset V$ sottosp. vettoriale t.c.

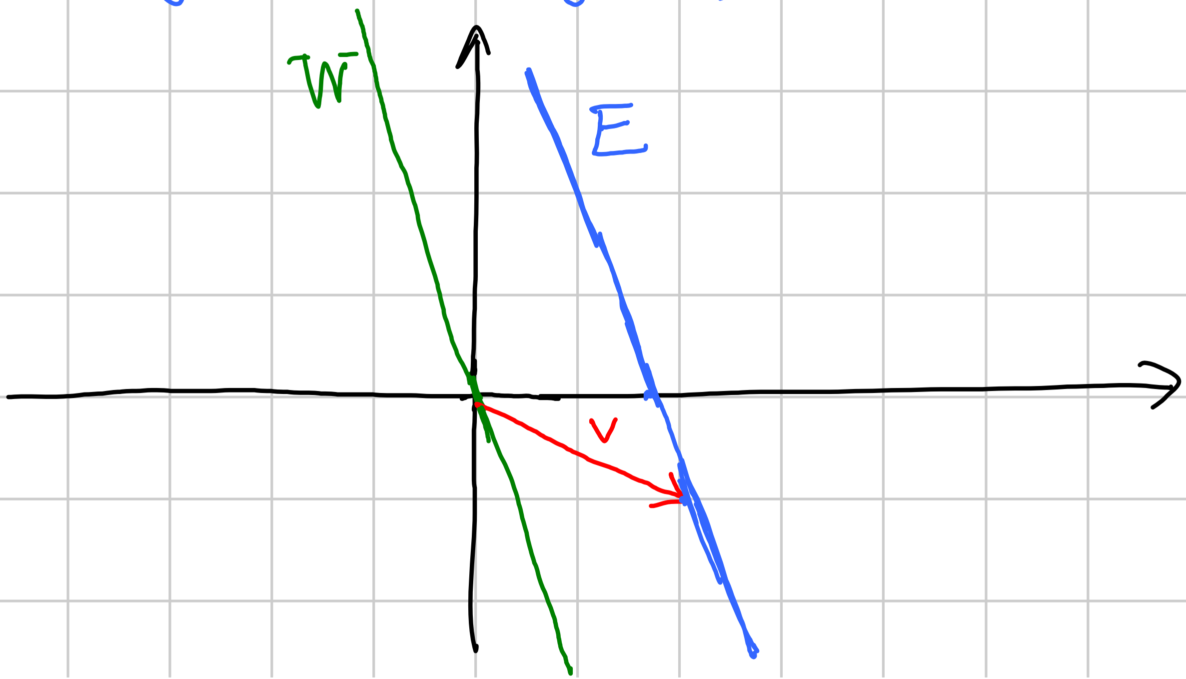
$$E = \{ v + w : \quad w \in W \}.$$

Scriviamo $E = \underbrace{v + W}$

↳ nuovo + tra vett. e sottosp. vett.

($Z + Y = \{z + y : \; z \in Z, \; y \in Y\}$: notaz. coerente).

Significato:

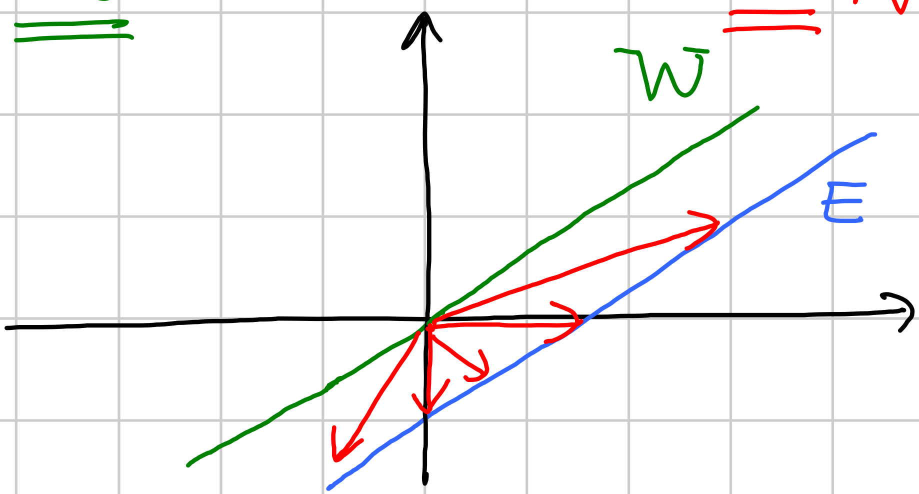


cioè E è ottenuto dal sttsp. vett. W per traslazione di vettore v (dunque E è il parallelo a W passante per il secondo estremo di v).

Q: E determina W? E determina v?

sì

no: va bene qualsiasi $v \in E$



Prop: (a) Se $v+W = v'+W'$ allora $W' = W$

(b) $v+W = v'+W \iff v' \in v+W$.