Es. Alg. Lin 22/10/2014

Es ⑥ $V = \mathbb{R}^3$

(a)

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4 = \lambda_1 \, 3 \\ 5 = \lambda_1 (-6) \\ -2 = \lambda_1 \cdot 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = -2$$

il sistema non ha sol.

$\Rightarrow v \notin \operatorname{Span}(w_1)$

(b)

$$v = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ① \; 2 = \lambda_1 \cdot 3 + \lambda_2 \cdot 4 \\ ② \; -5 = \lambda_1 (-2) + \lambda_2 \cdot 1 \\ ③ \; 4 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 (-2) \end{cases}$$

② + 2 ③

$$-5 + 2(4) = \lambda_1 (-2 + 2 \cdot 1) + \lambda_2 (1 - 2 \cdot 2)$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\begin{cases} \text{I}^e \text{ eq.} \\ 3 = -3\lambda_2 \\ \text{II}^e \text{ eq} \end{cases}$$

① $\quad 2 = \lambda_1 \cdot 3 + (-1) 4 \implies \lambda_1 = \dfrac{2+4}{3} = 2$

③ $4 = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2)$

$4 = 2 + 2$

Quindi il sistema ha una (!) soluz. e $v \in \mathrm{Span}(w_1, w_2)$

(c) $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3 = \lambda_1 \cdot 5 + \lambda_2 \cdot (-2) \\ 1 = \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 2 \\ -2 = \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 3 \end{cases}$$

① + ② $\quad 4 = \lambda_1 \, 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{2}{3}$

② sostituisco λ_1 trovando

$$1 = \frac{2}{3} + \lambda_2 \cdot 2 \qquad \lambda_2 = \frac{1}{6}$$

③ sostituisco λ_1, λ_2

$$-2 = \frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3$$

ma $\frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{8+3}{6} = \frac{11}{6} \neq -2$

$\Rightarrow$ il sistema non ha soluzione

$v \notin \mathrm{Span}(w_1, w_2)$

(d)

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -1 = \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 5 + \lambda_3 \cdot 3 \\ 3 = \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 1 + \lambda_3 (-1) \\ -8 = \lambda_1 (-3) + \lambda_2 \cdot 2 + \lambda_3 \cdot 5 \end{cases}$$

Scrivo il nuovo sistema equivalente:

$$\begin{cases} (1) - (2) \\ 3\,(1) + 2\,(3) \\ (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 = \lambda_2 \cdot 4 + \lambda_3 \cdot 4 \\ -13 = \lambda_2 \cdot 13 + \lambda_3 \, 13 \\ -1 = \lambda_1 \cdot 2 + \lambda_2 \cdot 5 + \lambda_3 \cdot 3 \end{cases} \implies -1 = \lambda_2 + \lambda_3$$

$$\underbrace{\lambda_2 = -\lambda_3 - 1}$$

sostituisco λ_2 nell'equazione che resta (la 3ª):

$$-1 = \lambda_1 \cdot 2 + (-\lambda_3 - 1) \cdot 5 + \lambda_3 \cdot 3$$

$$-2\lambda_1 = 1 + -5 - 5\lambda_3 + 3\lambda_3$$

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2}\left(-4 - 2\lambda_3\right)$$

$\lambda_1 = 2 + \lambda_3$ quindi:

Per qualsiasi valore di λ_3 trovo λ_1, λ_2 che risolvono il sistema. Quindi ho un'infinità di soluzioni.

(e) $v = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $w_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ $w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} -4 = -\lambda_2 \\ 1 = \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ 2 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

$\lambda_2 = 4$

sostituisco λ_2 nella 3^e eq

$2 = -\lambda_1 + 12 + \lambda_3$

$-10 = -\lambda_1 + \lambda_3$

$$\begin{cases} 1 = \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ -10 = -\lambda_1 + \lambda_3 \end{cases}$$

sommando $-9 = 3\lambda_3$

$\lambda_3 = -3$

$-10 = -\lambda_1 + (-3) \implies \lambda_1 = 7$

$\exists!$ sol $\Rightarrow v \in \text{span}(w_1, w_2, w_3)$

es 7 $\quad V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t]$

$v = 1 - 2t + 3t^2$ $\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$w_1 = 4 + t - t^2$

$w_2 = -3 + 2t + t^2$ $\quad w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Posso ragionare con i polinomi di grado ≤ 2 come vettori in $\mathbb{R}^3$.

B $\quad z = 1 - t^2 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$1 + 0t + (-1)t^2$

$M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ analogamente, ragiono come se avessi vettori in $\mathbb{R}^4$:

<u>es</u>: $v = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$