

Alg. Lin. 21/10/14

Def: V sp. vett. $(v_1, \dots, v_m)$ è base se
 $v_1, \dots, v_m$ sono lin. indip. e generano -

Teo: due basi dello stesso V hanno lo stesso
numero di elementi -

Def: $\dim_{\mathbb{R}}(V) =$ numero di elementi di qualsiasi base

Prop: due sp. vett. con la stessa dimensione
sono "uguali" come spazi vett. -

Il Teo segue da:

Prop: $P(h)$: considerati $w_1, \dots, w_h$ lin. indep.
e $k \geq 0$ e vettori $v_1, \dots, v_k$ t.c. $w_1, \dots, w_h \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$
si ha $h \leq k$.

Dimo (per induzione) - Passo base: $h=0, k \geq 0=h$ ✓

Dimostro a mano anche $P(1)$ — non necessario.

$P(1)$: prendiamo w_1 lin. indep cioè $\neq 0$;
inoltre $k \geq 0, v_1, \dots, v_k$ t.c. $w_1 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

Devo provare che $k \geq 1$: se fosse $k=0$
avrei $w_1 \in \text{Span}(\emptyset) = \{0\}$; invece $w_1 \neq 0$.

Dimostro $P(h) \Rightarrow P(h+1)$.

Prendo $x_0, \dots, x_h$ lin. indep, $y_1, \dots, y_m$ t.c.

$x_0, \dots, x_h \in \text{Span}(y_1, \dots, y_m)$; devo provare
(usando $P(h)$) che $h+1 \leq m$.

So che $x_j \in \text{Span}(y_1, \dots, y_m) \Rightarrow$ posso scrivere

$$x_j = a_{j1}y_1 + \dots + a_{jm}y_m -$$

Una volta che $x_0 \neq 0$, dunque qualche coeff
 a_{0i} per $i \in \{1, \dots, m\}$ deve essere $\neq 0$ -

Siccome l'ordine di $y_1, \dots, y_m$ non conta
posso supporre $a_{01} \neq 0$ - Una poupo:

$$w_j = x_j - \frac{a_{j1}}{a_{01}} \cdot x_0 - \text{Affermo che:}$$

•) $w_1, \dots, w_h$ sono lin. indep.

••) $w_1, \dots, w_h \in \text{Span}(y_2, \dots, y_m)$ -

Dando ciò per buono, $P(h)$ dice : $h \leq m-1$
cioè $h+1 \leq m$, dunque è dimostrata la tesi voluta.

Dimostro $\bullet$) : siano $\lambda_1, \dots, \lambda_h \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_h w_h = 0 \text{ cioè}$$

$$\lambda_1 (x_1 - \lambda \cdot x_0) + \dots + \lambda_h (w_h - \lambda \cdot x_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_0 \cdot x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_h x_h = 0 \quad \text{Ora so che}$$

$$x_0, \dots, x_h \text{ sono lin. indep} \Rightarrow (\lambda_0 =) \lambda_1 = \dots = \lambda_h = 0$$

OK

$\bullet\bullet$)

$$w_j = x_j - \frac{a_{j1}}{a_{01}} x_0$$

$$= a_{j1} \cdot y_1 + a_{j2} y_2 + \dots + a_{jn} y_n$$

$$- \frac{a_{j1}}{a_{01}} (a_{01} y_1 + a_{02} y_2 + \dots + a_{0n} y_n)$$

$$= \underbrace{\left(a_{j1} - \frac{a_{j1}}{a_{01}} \cdot a_{01} \right)}_0 \cdot y_1 + \lambda \cdot y_2 + \dots + \lambda \cdot y_n$$

$\in \text{Span}(y_2, \dots, y_n)$

clausura ok -



Q: come costruire basi di un dato V ?

Lemma 1: dato V con $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ e $w_1, \dots, w_h \in V$
lin. indep. si ha $h \leq n$.

Es: $\dim(\mathbb{R}^2) = 2 \Rightarrow$ un insieme di 3 o
più vettori di $\mathbb{R}^2$ è detto
lin. dipendente -

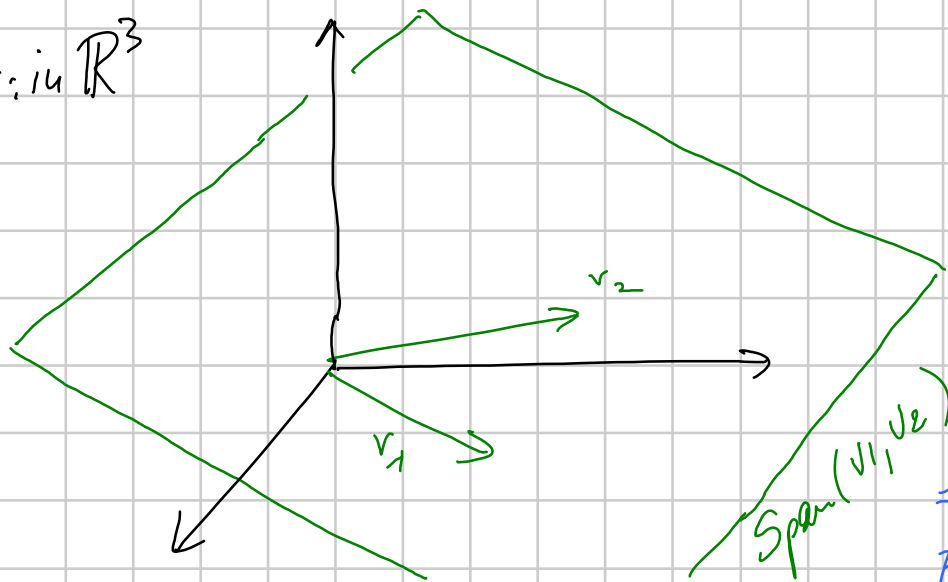
Dicesi: segue subito dalla prop: se $v_1, \dots, v_m$ è base
ho $w_1, \dots, w_h \in V = \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$
 $\Rightarrow$ _{prop.} $h \leq m$ -



Lem 2: dati $v_1, \dots, v_k$ lin. indep. e v_0

$v_0, v_1, v_2, \dots, v_k$ lin. indep. $\Leftrightarrow v_0 \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

E: in $\mathbb{R}^3$



Se aggiungo un
terzo vettore
sul piano poi
i tre sono lin.
dip.; se ne
aggiungo uno
fuori del piano
poi tre sono lin.
indip.

Dimo Lem 2: basta far vedere

$v_0, v_1, \dots, v_k$ lin. dip. $\Leftrightarrow v_0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

$\Leftarrow$ $v_0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ allora $v_0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$

$$\Rightarrow (-1) \cdot v_0 + \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

$\exists$ una comb. lin. di $v_0, v_1, \dots, v_k$ con risultato 0
ma non tutti i coeff. 0; dunque $v_0, v_1, \dots, v_k$
sono lin. dip. [Oss: non ho usato ipotesi]

$\Rightarrow$ $v_0, v_1, \dots, v_k$ lin. dip. dunque esistono

$\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k$ non tutti nulli t.c.

$$\mu_0 v_0 + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k = 0$$

Se avessi $\mu_0 = 0$ avrei $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_k v_k = 0$

ma $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip. dunque

$\mu_1 = \dots = \mu_k = 0$: impossibile. Allora $\mu_0 \neq 0$

$$\Rightarrow v_0 = \left(-\frac{\mu_1}{\mu_0}\right) v_1 + \dots + \left(-\frac{\mu_k}{\mu_0}\right) v_k$$

cioè $v_0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$ -



Il procedimento di costruzione di base: COMPLETAMENTO

Prop: Se $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ e sono dati $v_1, \dots, v_k \in V$
lin. indep. allora esistono $v_{k+1}, \dots, v_n$ t.c.
 $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ sono base -

Dimo: si usa il Lem 2:

$v_1, \dots, v_k$ generano V
 $\downarrow$ no
 $\text{Span}(v_1, \dots, v_k) \subsetneq V$
 $\Rightarrow \exists v_{k+1} \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$
 $\underbrace{v_1, \dots, v_{k+1}}_{\text{generano}}$
 $\downarrow$
ok, è già una base senza aggiungere

$\swarrow \text{si}$
 ok ho completato
 $\downarrow \text{no}$
 prendo $v_{k+2} \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1})$

$\text{---} \circ \text{---}$
 $v_1, \dots, v_{k+1}, v_{k+2}$ generano?

$\swarrow \text{si}$
 ok
 $\downarrow \text{no}$
 aggiungo v_{k+3} e t.t.f.
 $v_1, \dots, v_{k+3}$
 sono lin. indep.

Siccane per Lem 1 dentro V non posso trovare
 più di n vettori lin. indep. $\Rightarrow$ a un certo
 punto mi fermo con una base. $\square$

Es: $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ ($\neq 0 \Rightarrow$ lin. indep.
ma non base)

Posso aggiungere v_2 qualsiasi purché non multiplo di v_1 :

$v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1574 \end{pmatrix}$ o $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ o ...

Es: $V = \mathbb{R}^3$ $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \\ +4 \end{pmatrix}$

(lin indep: sì, non sono proporz. ~
base? no, $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$)

Posso completare aggiungendo qualsiasi
 $v_3 \notin \text{Span}(v_1, v_2)$

ovvero v_3 che non sia della forma $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

$$v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{e} \\ -17'' \\ \pi \end{pmatrix}$$

ok

~~$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$~~

non sa bene: $\tilde{v}$

$$\frac{2}{3}v_1 - \frac{1}{3}v_2$$