

Alg. lin. 19/11/14

$$\det_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \quad _$$

Proprietà: A invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Prop: $\det({}^t A) = \det(A)$ _

"Dim": $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot \underbrace{a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}}_{(*)}$

$$\det({}^t A) = \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\tau) \cdot ({}^t A)_{1,\tau(1)} \cdot ({}^t A)_{2,\tau(2)}^{(*)} \cdot \dots \cdot ({}^t A)_{n,\tau(n)}$$

$$= \sum_{\tau \in \mathcal{S}_n} \text{sgn}(\tau) \cdot \underbrace{a_{\tau(1),1} \cdot a_{\tau(2),2} \cdot \dots \cdot a_{\tau(n),n}}_{\text{posso descriverlo come}}$$

$$\underbrace{a_{1,\tau^{-1}(1)} \cdot a_{2,\tau^{-1}(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\tau^{-1}(n)}}_{(*)}$$

$(*) = (*)$ ponendo $\sigma = \tau^{-1}$

(va bene perché il inverso di $\tau \in \mathfrak{S}_n$ si ha
che τ^{-1} va in $\mathfrak{S}_n$) : si conclude osservando

$$\text{sgn}(\tau^{-1}) = \text{sgn}(\tau)$$

perché se $\tau = p_1 \circ \dots \circ p_n$ (p_i trasposit)

$$\Rightarrow \tau^{-1} = p_n \circ \dots \circ p_1$$

$$\Rightarrow \text{sgn}(\tau^{-1}) = \text{sgn}(\tau) = (-1)^n. \quad \square$$

Oss: usando direttamente le formule,
 $\det(A)$ con $A \in M_{n \times n}$ è somma di $n!$
addendi / $n=3 \rightarrow 6$; $n=4 \rightarrow 24$
 $n=5 \rightarrow 120 \dots (n!)$

Sviluppi di Laplace

Data $A \in M_{n \times n}$ $i, j \in \{1, \dots, n\}$

chiamo A^{ij} la matrice ottenuta da A

cancellando riga i e colonna j .

Es: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & \pi \\ -7 & \sqrt{11} & -1 \\ 4 & 9 & 13 \end{pmatrix}$ $A^{23} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$.

Sviluppo lungo riga j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} \cdot a_{ji} \cdot \det(A^{ji})$$

Sviluppo lungo colonna j :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det(A^{ij})$$

Es: $\det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & \sqrt{3} & \pi \\ e & 0 & 0 & 11 & 0 \\ -7 & 10 & -17 & 41 & -3 \\ -2 & -5 & -7 & 12 & 17 \end{pmatrix}$ ← sviluppo:

$$= (-1)^{3+1} \cdot e \cdot \det \begin{pmatrix} 3 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & 8 & \sqrt{3} & \pi \\ 10 & -17 & 41 & -3 \\ -5 & -7 & 12 & 17 \end{pmatrix} + (-1)^{\dots} \cdot 0 \cdot \dots + (-1)^{\dots} \cdot 0 \cdot \dots$$

$$+ (-1)^{3+4} \cdot 11 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 11 \\ -7 & 10 & -17 & -3 \\ -2 & -5 & -7 & 17 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 0 \dots$$

$$\underline{E_5}: \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -4 & 5 & 7 & 11 \\ -9 & 8 & 4 & 71 \\ -5 & 17 & 21 & 0 \end{pmatrix}$$

↑

$$= (-1) \cdot 0 \dots + (-1)^{2+4} \cdot 11 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -9 & 8 & 4 \\ -5 & 17 & 21 \end{pmatrix} +$$

$$+ (-1)^{3+4} \cdot 71 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 7 \\ -5 & 17 & 21 \end{pmatrix} + (-1) \cdot 0 \dots$$

Formule di sviluppo: siamo le formule con Σ -

Attenzione: vedremo metodi per creare zeri
in una matrice senza cambiare det.

Approccio alternativo alla teoria del determinante.

Per $n = 1, 2, 3$ si osservano le proprietà
seguenti:

1. $\det$ è lineare in ciascuna colonna
fissate le altre

NON È LINEARE come
 $\det: M_{m \times m} \rightarrow \mathbb{R}$

cioè:

$$\det(v_1, v_2, \dots, \lambda_1 \cdot v_j^{(1)} + \lambda_2 \cdot v_j^{(2)}, v_{j+1}, \dots, v_m)$$

$$= \lambda_1 \cdot \det(v_1, v_2, \dots, v_j^{(1)}, \dots, v_m)$$

$$+ \lambda_2 \cdot \det(v_1, v_2, \dots, v_j^{(2)}, \dots, v_m) -$$

$$\underline{Es}: \det \begin{pmatrix} 1 & 3\sqrt{2} + 5\sqrt{3} & 7 \\ -2 & 4\sqrt{2} - 11\sqrt{3} & 9 \\ 5 & -6\sqrt{2} + 4\sqrt{3} & 17 \end{pmatrix}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ -2 & 4 & 9 \\ 5 & -6 & 17 \end{pmatrix} + \sqrt{3} \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ -2 & -11 & 9 \\ 5 & 4 & 17 \end{pmatrix} -$$

2. Il det cambia segno scambiando tre loro due colonne

$$\underline{Es}: \det \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & 13 \\ -9 & 41 & 17 \end{pmatrix} = - \det \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 7 & 5 & 13 \\ 41 & -9 & 17 \end{pmatrix}$$

11

$$- \det \begin{pmatrix} -2 & 4 & 3 \\ 13 & 7 & 5 \\ 17 & 41 & -9 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 7 & 13 & 5 \\ 41 & 17 & -9 \end{pmatrix}$$

Qss: Se $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ho

$$\det(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \det(v_1, \dots, v_n)$$

$$3. \det(I_n) = 1.$$

Teorema (non facile) : esiste una e una sola funzione $M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

1. è lineare in ciascuna colonna

2. cambia segno scambiando due colonne

3. vale 1 su I_n .

$$\left(\text{Si ritrova } \det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} \right)$$

Conseguenze:

- (•) il det di una matrice con due colonne uguali vale 0 (stesso per righe).
- (•) il det non cambia se sostituisco una colonna con sé stessa più un multiplo di un'altra (stesso per righe):

$$\det (v_1, \dots, v_i, \dots, v_j + \lambda \cdot v_i, \dots, v_m)$$

$$= \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_m) \\ + \det(v_1, \dots, v_i, \dots, v_i, \dots, v_m) -$$

due col uguali $\Rightarrow 0$

Strategie di calcolo di $\det(A)$ per $A \in M_{n \times n}$
 n grande: (•) creare molti 0 su una riga o col
 (•) sviluppare lungo una

Es: $\det \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -5 \\ 2 & -9 & 7 & -3 \\ -5 & 1 & 6 & -7 \\ 4 & 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} - 6 \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix} \right)$$

Risultato:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 & -5 \\ 2 & -9 & 7 & -3 \\ -5 & 1 & 6 & -7 \\ 4 & 2 & -3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 38 & 7 & -38 & 44 \\ -43 & -9 & 61 & -66 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 14 & 2 & -15 & 24 \end{pmatrix} \leftarrow$$

$$= (-1)^{3+2} \cdot 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 38 & -38 & 44 \\ -43 & 61 & -66 \\ 14 & -15 & 24 \end{pmatrix}$$

$$= -2 \cdot \det \begin{pmatrix} 19 & -19 & 22 \\ -43 & 61 & -66 \\ 14 & -15 & 24 \end{pmatrix}$$

$$= (-2) \det \begin{pmatrix} 0 & -19 & 22 \\ 18 & 61 & -66 \\ -1 & -15 & 24 \end{pmatrix}$$

$$= (-2) \det \begin{pmatrix} 0 & -19 & 22 \\ 0 & 61 - 15 \cdot 18 & -66 + 18 \cdot 24 \\ -1 & -15 & 24 \end{pmatrix}$$

$$= (-2) \cdot (-1)^{3+1} \cdot (-1) \cdot \det \begin{pmatrix} -18 & 22 \\ 61-15 \cdot 18 & -66+18 \cdot 24 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \left(-19 \cdot (-66+18 \cdot 24) - 22(61-15 \cdot 18) \right) -$$

Teo (Binet) : $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ -

Dimo : difficile usando le formule con Σ_n -

Dimo (indiretta - usando il Teo 1: pag. 12) -

So gie du
 $\det(M) \neq 0 \Leftrightarrow M \text{ invertierbar}$

Se $\det(A) = 0 \Rightarrow A \text{ non è invertibile}$

$\Rightarrow A \cdot B \text{ non invertibile}$

$\Rightarrow \det(A \cdot B) = 0$

$\Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
" " " "

Se $\det(A) \neq 0$ considera la funzione:

$$f : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$M \mapsto \frac{\det(A \cdot M)}{\det(A)}$$

Si verifica che f soddisfa le proprietà:

1. Lineare in ciascuna colonna
2. Cambia segno scambiando due col
3. vale 1 su I_n

$$I_n \mapsto \frac{\det(A \cdot I_n)}{\det(A)} = 1.$$

Per il Teo si ha

$$\frac{\det(A \cdot M)}{\det(A)} = \det(M) \quad \forall M$$

$$\Rightarrow \det(A \cdot M) = \det(A) \cdot \det(M) \quad \square$$

Prop: se $\det(A) \neq 0$ si ha

$$(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)}.$$

$$\underline{\text{Es:}} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$(\text{Verf. : } \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})$$

$$= \frac{1}{ad-bc} \cdot \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = I_2.$$

Ex:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & 15 & -11 \\ 0 & 29 & -7 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix} = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 15 & -11 \\ 29 & -7 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 15 & 11 \\ 29 & 7 \end{pmatrix} = 105 - 319 = -214$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{214} \begin{pmatrix} -16 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & -30 \\ 29 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 4 & 5 & 1 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dimo: pentru $B = (b_{ij})$ avem $b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)}$

e verifichiamo che $B = A^{-1}$, cioè

$$A \cdot B = I_n \quad \text{e} \quad B \cdot A = I_n$$

(basterebbe una delle due: implica l'altra) -

$$(A \cdot B)_{kj} = \sum_{i=1}^n a_{ki} \cdot b_{ij} = \sum_{i=1}^n a_{ki} (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{\hat{j}i})}{\det(A)}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \underbrace{\sum_{i=1}^n (-1)^{j+i} a_{ki} \cdot \det(A^{\hat{j}i})}$$

Sviluppo lungo la riga j -esima del $\det$
della matrice ottenuta da A
sostituendo le righe j -esime con
righe k -esime:

Se $k=j$ viene $\det(A)$

se $k \neq j$ viene 0 (due righe uguali)

$$\delta_{kj} \Rightarrow A \cdot B = I_n$$

$$(B \cdot A)_{ik} = \sum_{j=1}^m b_{ij} \cdot a_{jk} = \sum_{j=1}^m (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)} \cdot a_{jk}$$

$$= \frac{1}{\det(A)} \cdot \sum_{j=1}^m (-1)^{j+i} \cdot a_{jk} \det(A^{ji})$$

sviluppo lungo colonna i -esima del $\det$ di
matrice ottenuta da A sostituendo
colonne i -esima con colonne k -esima

se $k=i$ viene $\det(A)$

se $k \neq i$ viene 0 (due colonne uguali)

S_{ik}

$\Rightarrow B \cdot A = I_n.$



Formule di Cramer : se

$$A \cdot x = b$$

è un sistema quadrato ($A \in M_{n \times n}$)
con $\det(A) \neq 0$ (cioè ha soluz. unica)
allora la soluzione x si trova con:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

dove A_i è ottenuta da A sostituendo
la colonna i -esima con b

$$\underline{\mathcal{E}}_S: \begin{cases} 3x - 5y + 7z = 12 \\ 4x + 2y - 9z = 6 \\ -x + 8y + 11z = -7 \end{cases}$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 12 & -5 & 7 \\ 6 & 2 & -9 \\ -7 & 8 & 11 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & -9 \\ -1 & 8 & 11 \end{pmatrix}}$$

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 12 & 7 \\ 4 & 6 & -9 \\ -1 & -7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$y = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & -9 \\ -1 & 8 & 11 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ 4 & 2 & -9 \\ -1 & 8 & 11 \end{pmatrix}}$$

$$z = \dots$$

Dimo: $x_i = (A^{-1} \cdot b)_i =$

$$= \sum_{j=1}^n (A^{-1})_{ij} \cdot b_j$$

$$= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \frac{\det(A^{ji})}{\det(A)} \cdot b_j$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot b_j \cdot \det(A^{ji})}{\det(A)} \quad \leftarrow \text{sviluppo lungo le colonne } i \text{ della}$$

matrice ottenuta da A
sostituendo la colonna i
con b

$\implies$ viene $\det(A_i)$

