

Es. Alg Lim

13/11/2014

Foglio 15/XI/2014

Es 1

$$X = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0\}$$

$$f : \mathbb{R} \xrightarrow{\subseteq_2} [t] \rightarrow X$$

$$f(1 - 2t^2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(-2t + t^2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f(-1+t+t^2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = 1 - 2t^2$$

$$v_2 = -2t + t^2$$

$$v_3 = -1 + t + t^2$$

} basis of $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $v_1 \quad v_2 \quad v_3$

$$1 \cdot (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot (1) \cdot (1) \cdot (1) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(-1) \cdot 0 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 0 \cdot 1 +$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$+ (-1) \cdot (-1) \cdot (-2) \cdot (-2) =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-3) + 0 + 4 = 1$$

$\det \neq 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ sono indep.

$\dim \mathbb{R}[t]_{\leq 2} = 3 \Rightarrow \{v_1, v_2, v_3\}$ è base

$\Rightarrow \exists!$ f una volta fissati i suoi valori
in una base, quindi la f dell'es. è!

• f è biettiva?

$\dim \text{Im}(f) = ?$

$$\begin{pmatrix} \begin{array}{ccc|c} 8 & 11 & -10 & \\ 1 & 0 & 3 & \\ 2 & 1 & 0 & \\ \hline -1 & -2 & 1 & \end{array} \end{pmatrix} \rightarrow \text{calcolo il det.}$$

$$\det = 8 \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 11 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 8(-3) - 11(-6) - 10(1) =$$

$$= -24 + 66 - 10 = 32 \neq 0$$

$\Rightarrow$ i tre vettori sono indipendenti $\Rightarrow \dim \text{Im}(f) = 3$

$\dim X = 3 \Rightarrow f$ è biettiva da $\mathbb{R}[t]_{\leq 2}$ a X .

$$\cdot f(3 - t + t^2)$$

$$3 - t + t^2 = x_1 (1 - 2t^4) + x_2 (-t + 2t^4) + x_3 (-1 + t + t^2)$$

B base di $\mathcal{R}_{\leq 2}(\mathbb{R})$

"
 $\{1, t, t^2\}$

$\mathcal{C}$ base di X

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1/4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[t]_B^{\mathcal{C}}$$

$$f(B) = [1]_B^{\mathcal{C}} \quad \mathcal{C}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_B^T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ etc ... } \quad (\text{considero tutte le condizioni assegnate})$$

e allora: $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_B^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 11 & -10 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}_B$

calcolando l'inversa
potrei scrivere: $\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}_B^T = B A^{-1}$ e calcolo

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{e quindi:}$$

$$B A^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & -9 & -7 \\ -15 & -4 & -8 \\ 8 & -3 & -5 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Risolvero direttamente :

$$3 - t + t^2 = x_1 (1 - 2t^2) + x_2 (-t + 2t^2) + x_3 (-1 + t + t^2)$$

ovvero :

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

v_1

v_2

v_3

ho già
calcolato
 $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$$x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) = -8$$

$$x_2 = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \left(1 \cdot (-2) - 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-2) \right) = 6$$

$$x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1 + 2) + 3 \cdot (-2) = -5$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -8v_1 + 6v_2 - 5v_3$$

$$f(-8v_1 + 6v_2 - 5v_3) = -8f(v_1) + 6f(v_2) - 5f(v_3) =$$

$$= -8 \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -64 + 66 + 50 \\ -8 - 15 \\ -16 + 6 \\ 8 - 12 - 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52 \\ -23 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \gamma_1 \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \gamma_3 \begin{pmatrix} -10 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{matrix}$



$$\begin{cases} f'(w_1) = v_1, & f'(w_2) = v_2, & f'(w_3) = v_3 \\ f' \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -t \end{cases}$$

Per risolvere $\textcircled{*}$ (che ha soluzione perché w_1, w_2, w_3

sono indep. e generano X) posso usare le prime 3 coordinate perché ho già visto prima che w_1, w_2, w_3 sono indep. rispetto alle prime 3 coordinate.