

Es. Alg. Lin 18/11/2014

Foglio 9/11/2014

Es. 5

$$\dim V = n$$

$$\dim W = m$$

$$X \subset V$$

$$\dim X = k$$

$$Y \subset W$$

$$\dim Y = h$$

$$A = \{ f \in \mathcal{L}(V, W) : f(X) \subset Y \} \quad \text{è sottospazio di } \mathcal{L}(V, W)$$

$$f_1, f_2 \in A$$

$$f_1 + f_2$$

$$f_1 + f_2 \in A \quad ?$$

$$\forall x \in X \quad (f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \in Y$$

perché Y è sottospazio

$$f_1 \in A \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\lambda f_1 \in A \quad ?$$

$$\forall x \in X \quad (\lambda f_1)(x) = \lambda (f_1(x)) \in Y$$

$$\lambda (f_1(x)) \in Y \quad \text{perché } f_1(x) \in Y \quad \text{e } Y \text{ è sottospazio}$$

$$\dim A = ?$$

Sia $x_1, \dots, x_k$ base di X

completa con $x_{k+1}, \dots, x_n$ e base di V

Sia $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ base di Y

completa con $\gamma_{l+1}, \dots, \gamma_m$ e base di W

$f \in A$ è determinata dal valore su $x_1, \dots, x_k$

$$f(x_1) = \alpha_{11} \gamma_1 + \dots + \alpha_{1l} \gamma_l \quad \text{h parametri}$$

$$f(x_k) = \alpha_{k1} \gamma_1 + \dots + \alpha_{kl} \gamma_l \quad \text{h parametri}$$

$$f(x_{k+1}) = a_{k+1,1} y_1 + \dots + a_{k+1,m} y_m \quad m \text{ parametri}$$

$$f(x_n) = a_{n,1} y_1 + \dots + a_{n,m} y_m \quad m \text{ param}$$

in totale h_0 :

$h \cdot k + m(n-k)$ parametri indipendenti .

$$\dim A = h \cdot k + m(n-k)$$

Esercizio 6

$$g : X \rightarrow Y$$

$$h : Z \rightarrow W$$

$$A = \{ f \in \mathcal{L}(Y, Z) : h \circ f \circ g = 0 \}$$

A è sottospazio :

$$f_1, f_2 \in A$$

$$f_1 + f_2 \in A ?$$

$$h \circ (f_1 + f_2) \circ g = h \circ f_1 \circ g + h \circ f_2 \circ g = 0$$

$$\text{perché } f_1, f_2 \in A \Rightarrow h \circ f_1 \circ g = 0, h \circ f_2 \circ g = 0$$

analogamente $h \circ (\lambda f_1) \circ g = \lambda (h \circ f_1 \circ g)$

e quindi $x \quad f_1 \in A \quad \text{dove} \quad \lambda f_1 \in A$

$f \in A \iff f(\text{Im } g) \subset \text{Ker } h$

(già visto in es. (3) del
foglio (4) del 2/11/2014).

$\dim A$ è calcolata come nell'es. (5)

$$\dim A = \dim(\text{Ker } h) \cdot \dim(\text{Im } g) +$$

$$+ (\dim Y - \dim \text{Im } g) (\dim Z)$$

ovvero riscriviamo la formula dell'es. (5) con

qui a sinistra
sto usando la
notazione dell'es.
(5): h è un
numero!

$$\left\{ \begin{array}{l} n = \dim Y \\ m = \dim Z \\ K = \dim \operatorname{Im} g \\ h = \dim \operatorname{Ker} h \end{array} \right.$$

← questa h indica
l'applicazione
 $h: Z \rightarrow W$

$$\dim \operatorname{Ker} h = \dim Z - \dim \operatorname{Im} h$$

$$\dim A = (\dim Z - \dim \operatorname{Im} h) (\dim \operatorname{Im} g) + (\dim Y - \dim \operatorname{Im} g) (\dim Z)$$

Es. 7

$$f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^9$$

$$f(\overbrace{e_1 + 2e_4 - 7e_5}^{v_1}) = f(\overbrace{3e_2 + e_3 + e_4}^{v_2}) = 8e_1 - e_3$$

den $\text{Im } f = ?$

$$f(v_1) = f(v_2) \Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0$$

$$f(v_1) \neq 0$$

also v_1, v_2 sind lin. unabh. $v_1 - v_2 \in \text{Ker } f$

$$\dim \text{Ker } f \geq 1$$

$$\dim \operatorname{Im} f \geq 1$$

$$\dim \operatorname{Im} f = 5 - \dim \operatorname{Ker} f$$

$$\text{e poiché } \dim \operatorname{Ker} f \geq 1 \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \leq 4$$

$$1 \leq \dim \operatorname{Im} f \leq 4$$

Aut. possibili

f è determinata dal valore su una base.

posto considerare una base $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ottenuta

$$\text{completando } \begin{cases} v_1 = e_1 + 2e_4 - 7e_5 \\ v_2 = 3e_2 + e_3 + e_4 \end{cases} \text{ e base}$$

(Non ho bisogno di specificare chi sono i

vettori v_3, v_4, v_5 : se che esistono)

Verifico come posso realizzare tutti i casi possibili :

$$1. f(v_1) = \delta e_1 - e_2 \quad \forall ; \quad \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 1$$

$$2. f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) = f(v_4) \\ f(v_5) = e_2 \quad \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 2$$

$$3. f(v_1) = f(v_2) = f(v_3) \\ f(v_4) = e_2 \quad f(v_5) = e_3 \quad \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f = 3$$

$$4. f(v_3) = e_2, \quad f(v_4) = e_3, \quad f(v_5) = e_4$$

Ex. 8

$$f: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{R}^6$$

$$\dim X = ?$$

$$\mathbb{R}^7 = X \oplus \text{Ker}(f)$$

$$\mathbb{R}^6 = Y \oplus \text{Im}(f)$$

$$6 = 2 + \dim \text{Im}(f) \quad \Rightarrow \quad \dim \text{Im} f = 4$$

$$\dim \text{Ker}(f) = 7 - 4 = 3$$

$$\Rightarrow \dim \text{Im} f = 4$$

$$X \subset \mathbb{R}^7, \quad Y \subset \mathbb{R}^6$$

$$\dim Y = 2$$

$$\hookrightarrow 7 = \dim X + 3 \quad \Rightarrow \dim X = 4$$

oss $A_{-1} \neq 0$ cambiano 2e ovvero

$$\mathbb{R}^7 = X + \operatorname{Ker} f$$

$$\mathbb{R}^6 = Y + \operatorname{Im} f$$

$\Rightarrow$ ci sono più valori possibili per $\dim X$

Ex. 9) $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^8$ $\dim \ker f = 2$

$Z \subset \mathbb{R}^8$ $Z \cap \operatorname{Im}(f) = \{0\}$

$\dim Z = ?$

$\dim \operatorname{Im}(f) = 5 - 2 = 3$

$\dim (Z + \operatorname{Im}(f)) \leq 8$

$\dim (Z \cap \operatorname{Im}(f)) = 0$

$\dim Z + 3 \leq 0 + 8$

$\dim Z \leq 5$

perde $Z, \operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}^8$

(Grassmann)

Es. 10

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^7$$

$$\dim \operatorname{Im} f = 5$$

$$X \subset \mathbb{R}^n$$

$$X + \operatorname{Ker}(f) = \mathbb{R}^n$$

$$\dim X = ?$$

$$\dim X \cap \operatorname{Ker} f = ?$$

$$\dim \operatorname{Ker} f = 11 - 5 = 6 \quad \Rightarrow$$

$$0 \leq \dim(X \cap \operatorname{Ker} f) \leq 6$$

$$\dim X + \dim \operatorname{Ker}(f) = \dim \mathbb{R}^n + \dim X \cap \operatorname{Ker}(f)$$

6 11 6

$$0 \leq \dim X + 6 - 11 \leq 6$$

1

$$\dim X \geq 5$$

1

$$\dim X \leq 11$$

$$5 \leq \dim X \leq 11$$