

Alg. Lin. 18/11/14

Cerchiamo $\det_n : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$
che "dice se una A è invertibile" cioè t.r.
 A invert. $\Leftrightarrow \det_n(A) \neq 0$

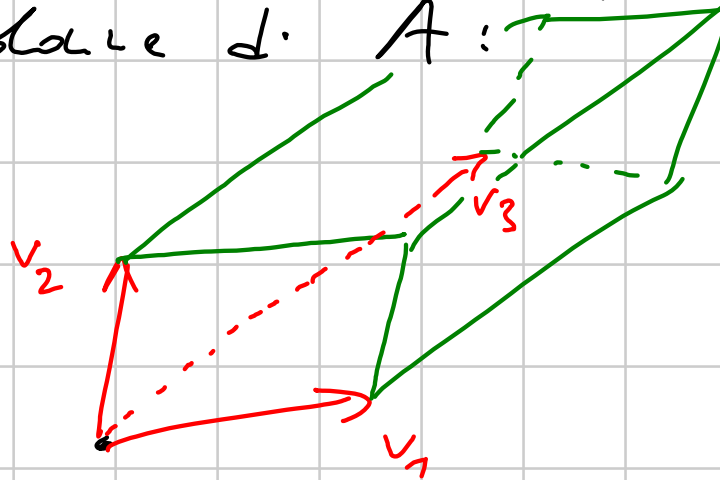
$$n=1 : \det_1((a_{11})) = a_{11}$$

$$n=2 : \det_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

(area con segno del parallelogramma
che ha come lati le colonne) -

$n=3$: $\det(A) = \text{volume (con segno) del}$
 $\text{parallelepipedo che ha per lati le}$
 $\text{colonne di } A$:

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$



Calcolo analogo a quello 2-dim.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

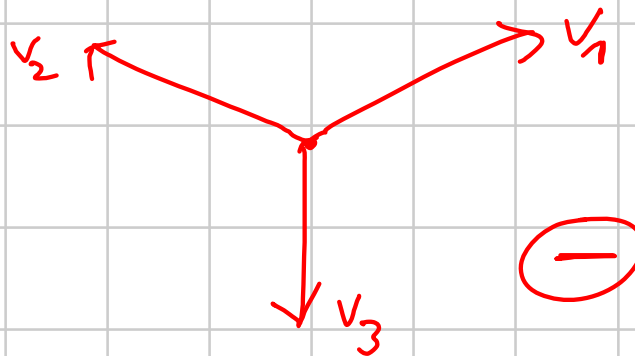
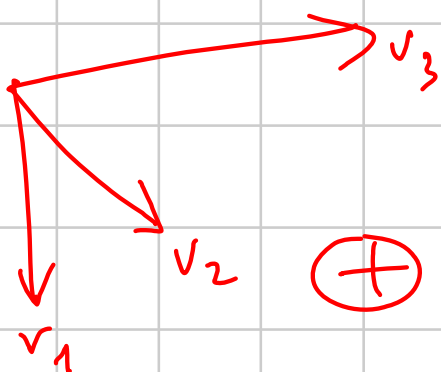
regola di Sarrus:

$$= + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Segu: $\det(v_1, v_2, v_3)$ ha senso:

- nullo se v_1, v_2, v_3 sono lin. dip.

- positivo se v_1, v_2, v_3 è una terna levogira, cioè è possibile disporre pollice, indice, medio della mano dx lungo le direz di v_1, v_2, v_3



segno positivo se
oppure: ruotando una vite convenuta da v_1 verso v_2
si ottiene la dirz di v_3 -

Per $n \geq 4$: allo stesso modo

$\det_n(v_1, \dots, v_n) =$ "volume n -dim con spigoli dell'iperparallelepipedo con lati $v_1, v_2, \dots, v_n$ "

Analisi di $\det_n$ $n = 1, 2, 3$

$$\det_1(a_{11}) = a_{11}$$

$$\det_2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}$$

$$\det_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$$

n	# addendi	ogni addendo è prodotto di ... coeff della mat	dove	segno
1	1	1	$(\circ)$	+
2	2	2	$(\begin{smallmatrix} \circ & \\ & \circ \end{smallmatrix})$ $(\begin{smallmatrix} & \circ \\ \circ & \end{smallmatrix})$	+/-
3	6	3	$(\begin{smallmatrix} \circ & & \\ & \circ & \\ & & \circ \end{smallmatrix})$ $(\begin{smallmatrix} & \circ & \\ \circ & & \\ & \circ & \end{smallmatrix})$ $(\begin{smallmatrix} & & \circ \\ \circ & \circ & \\ & \circ & \end{smallmatrix})$	+++
			$(\begin{smallmatrix} \circ & \circ & \\ & \circ & \\ \circ & & \end{smallmatrix})$ $(\begin{smallmatrix} & \circ & \\ \circ & \circ & \\ & \circ & \end{smallmatrix})$ $(\begin{smallmatrix} & & \circ \\ \circ & \circ & \\ & \circ & \end{smallmatrix})$	---
n	$n!$	n		?

tutti su righe e su colonne
 diverse; ovvero:
 sulle I righe scelgo un coeff. (n)
 sulle J righe scelgo un coeff. su

colonne nuove
sulle II righe coeff su
colonne nuove
...

$(n-1)$

$(n-2)$

⊗ tutti i possibili modi di scegliere
su righe e colonne diverse

Seguo...

— o —

Permutazioni

Una permutazione degli oggetti $\{1, \dots, n\}$
 è una funzione bijective $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$
 cioè un modo di riordinare tali oggetti:



↑
 riordinamento corrisponde $\sigma : \{1, \dots, 15\} \rightarrow \{1, \dots, 15\}$

dove $\sigma(1) = 7$, $\sigma(2) = 11$, $\sigma(3) = 4$, $\sigma(4) = 1, \dots$

e viceversa — Giudico l'insieme di tutte le permutaz.
di $\{1, \dots, m\}$ con S_m —

Oss: un addendo nel $\det(A)$ è del tipo

$$\pm a_{1,j_1} \cdot a_{2,j_2} \cdot a_{3,j_3} \cdot \dots \cdot a_{m,j_m}$$

con $j_1, \dots, j_m$ tutti distinti, cioè sono
un riordinamento di $\{1, \dots, m\}$ e

posso porre $\sigma(i) = j_i$ —

Es: nel det. di una 5×5 compare

$$\pm \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \leftrightarrow \sigma: \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 5 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 1 \\ 5 \mapsto 4 \end{array}$$

il prodotto sarà

$$\pm a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)} = \pm \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$$

produttore

Morde : $\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_m} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^m a_{i, \sigma(i)}$

devo dire chi è -

Def : chiamo trasposizione un elemento di $\mathcal{S}_m$
 che consiste nello scambio tra loro di due elementi

$$\sigma(i) = \begin{cases} i_2 & \text{se } i = i_1 \\ i_1 & \text{se } i = i_2 \\ i & \text{altrimenti} \end{cases} \quad i_1 \neq i_2$$

Fatto (facile): ogni permutazione è composizione di trasposizioni

Fatto (meno facile): il modo di esprimere una certa $\sigma \in \mathbb{S}_n$ come composiz. di trasposiz. non è unico, ma la parità del numero di trasposiz. dipende solo da σ .

Scrivo una permutazione σ come

$(\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \dots, \sigma(n))$

"fotografia dello scaffale" - $(7, 11, 4, 1, \dots)$

$$(4, 6, 5, 2, 1, 3, 8, 7) \in S_8$$

$$\downarrow^1 (1, 6, 5, 2, 4, 3, 8, 7)$$

$$\downarrow^2 (1, 2, 5, 6, 4, 3, 8, 7)$$

$$\downarrow^3 (1, 2, 3, 6, 4, 5, 8, 7)$$

$$\downarrow^4 (1, 2, 3, 4, 6, 5, 8, 7)$$

$$\downarrow^5$$

$$\overset{1}{\rightarrow} (4, 5, 6, 2, 1, 3, 8, 7)$$

$$\downarrow^2 (4, 5, 2, 6, 1, 3, 8, 7)$$

$$\downarrow^3 (4, 2, 5, 6, 1, 3, 8, 7)$$

$$\downarrow^4 (2, 4, 5, 6, 1, 3, 8, 7)$$

$$\downarrow^5 (2, 4, 5, 1, 6, 3, 8, 7)$$

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7)

↓⁶

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)

↓⁶

(2, 4, 1, 5, 6, 3, 8, 7)

↓⁷

(1, 4, 2, 5, 6, 3, 8, 7)

↓⁸

(1, 2, 4, 5, 6, 3, 8, 7)

↓⁹

(1, 2, 3, 5, 6, 4, 8, 7)

↓¹⁰

(1, 2, 3, 4, 6, 5, 8, 7)

↓¹¹

i modi sono diversi ma

6 e 12 sono
entrambi pari

$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 7)$

$\downarrow$ 12

$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8)$

Def: per il $\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{se } \sigma \text{ è composto da un numero pari di trasposizioni} \\ -1 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Es: nel det. di una 5×5 compare

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\sigma: \begin{array}{l} 1 \mapsto 2 \\ 2 \mapsto 5 \\ 3 \mapsto 3 \\ 4 \mapsto 1 \\ 5 \mapsto 4 \end{array}$$

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$$

con segno: $(2, 5, 3, 4, 4)$

$\downarrow^1$

$(1, 5, 3, 2, 4)$

$\downarrow^2$

$(1, 2, 3, 5, 4)$

$\downarrow^3$

$(1, 2, 3, 4, 5)$

$\Rightarrow$ compare $\rightarrow a_{12} \cdot a_{25} \cdot a_{33} \cdot a_{41} \cdot a_{54}$.

Conclusion :

$$\det_n(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i, \sigma(i)} -$$