

Alg. Lin. 17/12/14

Q5-7 $X: 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0$ $Y = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

$$\mathbb{R}^3 = X \oplus Y.$$

Matrice di P_X .

Dato $x \in \mathbb{R}^3$ vogliamo scrivere

$$x = \underbrace{\quad}_{\substack{\uparrow \\ X}} + \underbrace{\quad}_{\substack{\uparrow \\ Y}} \in Y \text{ cioè } t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\underbrace{\quad}_{X} = P_X(x)$

Verifichiamo: $\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{P_X(x)}$ soddisfa l'equazione di X

$$(2, 5, -3) \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$t = \frac{2x_1 + 5x_2 - 3x_3}{6 - 10 - 3}$$

$$p_X(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \frac{2x_1 + 5x_2 - 3x_3}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 13 & 15 & -9 \\ -4 & -3 & 6 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

è matrice invertibile

Q6-② $\mathcal{B} = (e_1, -3e_2, v)$, $[e_1 - e_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $v = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \cdot v \Rightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Q 7 - (3) Trovare w t.c. $\begin{pmatrix} 1+w & 2i-3 \\ w-2i & 1+i \end{pmatrix}$ non invert.

Impongo $\det = 0$:

$$\det = \det \begin{pmatrix} 1+w & 2i-3 \\ -1-2i & 4-i \end{pmatrix}$$

$$= w \cdot (4-i) + (4-i) + (1+2i)(2i-3)$$

$$= w \cdot (4-i) + 4-i - 7 - 4i$$

$$= w \cdot (4-i) - 3 - 5i$$

$$w = \frac{3+5i}{4-i} = \frac{1}{17} (3+5i)(4+i) = \frac{1}{17} (7+23i)$$

————— 0 —————

E[25]-(1) (A) Trovare al variare di k in $\mathbb{R}$ quante
sono le $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lin. t.c.

$$f\left(\begin{pmatrix} 1+k \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -k \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 5-2k \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4+2k \\ 2 \\ 1-k \end{pmatrix}.$$

Teoria : se i vettori su cui f è data sono base,
le f esiste unica.

$$\det \begin{pmatrix} 1+k & 1 & 5-2k \\ -1 & -k & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 3+k & 0 & 6-2k \\ -1-2k & 0 & -2-k \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\det \begin{pmatrix} 3+k & 6-2k \\ 1+2k & 2+k \end{pmatrix} = -5(k^2 - k)$$

Quindi : per $k \neq 0$ e $k \neq 1$ le f esiste unica.

(Chiamiamo v_1, v_2, v_3 i vett. su cui è dato f
e w_1, w_2, w_3 i vettori dati.)

Per $k=0$ e per $k=1$ avrò una relazione lineare

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0 ; \text{ due cas.}$$

$$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 \begin{cases} = 0 & \Rightarrow \text{esistono infinite } f \\ \neq 0 & \Rightarrow \text{non esiste } f. \end{cases}$$

$k=0 \Rightarrow$ si vede che $v_3 = 2v_1 + 3v_2$

ma $w_3 \neq 2w_1 + 3w_2 \rightarrow \nexists f$

$k=1 \Rightarrow v_3 = v_1 + v_2, w_3 = w_1 + w_2$

$\Rightarrow$ esistono infinite f .

(B) trovare $[f_{-1}]_{\sum_3}^{\sum_3} = A$.

Sappiamo $A \cdot v_{\bar{j}} = w_{\bar{j}} \quad \bar{j} = 1, 2, 3 \quad \text{cioè}$

$$A \cdot (v_1, v_2, v_3) = (w_1, w_2, w_3)$$

$$\Rightarrow A = (w_1, w_2, w_3) \cdot (v_1, v_2, v_3)^{-1}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{\substack{(w_1, w_2, w_3) \\ \text{con } K = -1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 7 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\substack{(v_1, v_2, v_3) \text{ con} \\ K = -1}}^{-1}$$

$$= (\text{cont}) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} \cdot & - & \cdot \\ - & - & \cdot \\ - & - & - \end{pmatrix}$$

(C) Per $k=-2$ trovare basi di $\text{Ker } f$ e $\text{Im } f$.

Per $k=-2$ ho $(w_1, w_2, w_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

$\text{rank} \geq 2$; $\det(\quad) = 0 \Rightarrow \text{rank} = 2$

Basi di $\text{Im}(f) = (w_1, w_2)$ —

Inoltre: $7w_1 + 4w_2 + 5w_3 = 0$

$\Rightarrow$ Base di $\ker f = (7v_1 + 4v_2 + 5v_3) -$

E $\boxed{8/1/14} - (1)$

(A) $X: 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \quad \subset \mathbb{R}^4$

Elencare gli el. di X con due coord. nulle, le altre
inter prime fra loro, positive quelle con indice minore

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1 9 8 -2 -8 24

(B) Ordinarli in modo che $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$ sia crescente.
e poi estrarne base $\mathcal{B}$ di X .

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

✓ ✓ " ✓

$$\frac{3}{2} \Pi - \frac{1}{2} I$$

(C) E' data una matrice A 4×4 -

Provare che la formula $f(x) = A \cdot x$
definisce $f: X \rightarrow X$ lineare.

Osservo che $g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ data da $g(y) = A \cdot y \quad \forall y \in \mathbb{R}^4$
è lineare;

Se provo che $g(X) \subset X$ ne deduco che
 f è l'abbreviazione a X della restrizione a X
di $g \Rightarrow f$ è lineare.

Posto $\omega = (2, 6, -3, 4)$ ho $X = \{x : \omega \cdot x = 0\}$.

Dunque devo vedere che

se $\omega \cdot x = 0$ allora $\omega \cdot g(x) = 0$

cioè $\underbrace{\omega \cdot A \cdot x}_{\text{calcolo}} = 0$

$\downarrow$ calcolo

$-9 \cdot \omega$

$\Rightarrow \underline{0_K}$

(D) Trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$.

$$f \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \stackrel{\text{cont.}}{=} \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_{\beta}^{\beta} = \begin{pmatrix} -1 & . & . \\ 5 & . & . \\ 0 & . & . \end{pmatrix}$$

② ① Eq. cont. pu

$$E = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 - 10 \cdot x_2 + 11 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = -27 \\ 0 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 - 3 \cdot x_4 = 0 \end{cases}$$

② Eq. param for F :

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 7x_4 = -6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

© Posiz. reciproce + dim $(E+F)$ -

$$E \cap F: \begin{cases} 4(2+4t-3s) + 1 \cdot (1+t+2s) \dots = 3 \\ 3(2+4t-3s) + \dots = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14t - 14s = -5 \\ 12t - 12s = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow E \cap F = \emptyset; \quad \begin{aligned} E &= r + W \\ F &= y + Z \end{aligned}$$

$W \cap Z$ descritto dalla parte omogenea dello stesso siet
 $\Rightarrow \dim = 1$ -

Dunque $E \cap F$ sono disgiunti ma non paralleli;

$$\dim(E+F) = 1 + (2 + 2 - 1) = 4$$

$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \\ & E \cap F = \emptyset & \dim W & \dim Z & \dim W \cap Z & & \\ & & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & \\ & & \dim(W+Z) & & & & \end{array}$

$$\Rightarrow E+F = \mathbb{R}^4$$

① Determinare $t \in \mathbb{R}$ t.c. $E + (te_2 + F) \neq \mathbb{R}^4$ -

$$\begin{aligned} \text{giacitura}(E) &= W \\ \text{giacitura}(te_2 + F) &= Z \end{aligned} \quad \Rightarrow \dim(W+Z) = 3$$

$\Rightarrow$ l'unica possibilità è che $E \cap (te_2 + F) \neq \emptyset$
(se è $\emptyset$ è tutto come sopra) -

Ora:

$$E = v + W, \quad t e_2 + F = t e_2 + y + z$$

si intersecano se

$$t \cdot e_2 + y - v \in W + z = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

✓ ✓ ✓

quindi devo imporre

$$\det \left(t e_2 + y - v, \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 11 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ t-1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(cont.)

$$t = -3/5.$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\hspace{2cm}} \quad 0 \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

27/1/14 (E1)

(A) Provare che $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è base di $\mathbb{R}^2$:

$$\det = -1 \neq 0.$$

(B) Provare che $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è base di $X: x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$.

$\dim X = 3 - 1 = 2$; gli d. l. di $\mathcal{B}$ sono in X e lin. indip. $\Rightarrow \text{ok}$

Verifcare de $v_1(t) = \begin{pmatrix} 1-8t \\ t+1 \\ 1-2t \end{pmatrix}$ $v_2(t) = \begin{pmatrix} 12-t \\ -t \\ 4-t \end{pmatrix}$ sono i. X.

$$1-8t+2t+2-3+6t = 0$$

$$12-t-2t-12+3t = 0$$

© Div quanto $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ intorno t.c.

$$f(v_1(t)) = \begin{pmatrix} t+4 \\ 4-5t \end{pmatrix}$$

$$f(v_2(t)) = \begin{pmatrix} 2-3t \\ 2t \end{pmatrix}$$

Uue solo se $(v_1(t), v_2(t))$ è base, cioè se

$$\det(v_1(t), v_2(t)) \neq 0$$

$$-(3t^2 - 4t - 4) = -(3t + 2)(t - 2)$$

dunque per $t \neq 2$ e $t \neq -2/3$ -

$$t=2: \quad f \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad f \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ eritono ∞ f

stesse delle
prime condizione

$$t = -2/3 : \quad I \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 10 \\ 22 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \nexists f$

$$I \left(\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 38 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -4/3 \end{pmatrix}$$

$$(v_2 = 2 \cdot v_1, w_2 \neq 2 \cdot w_1)$$

⑤ Trovare t per cui f esiste unica non invertibile.

Devo imporre $\det \begin{pmatrix} t+4 & 2-3t \\ 4-5t & 2t \end{pmatrix} = 0$

scegliendo le soluzioni $t=2$ che sono più decisive.
 $t = 4/13$ -

⑤ Trovare $[f]_{\mathcal{B}}$ per $t = -1$

Sappiamo $f \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ cioè $f \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
e $f \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$f \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f \left(-4 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = -4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -14 \end{pmatrix} = -57 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 100 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$f \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = f \left(-9 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 13 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = -9 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -31 \end{pmatrix} = -125 \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 219 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -57 & -125 \\ 100 & 219 \end{pmatrix}$$

② A $E_s :$
$$\begin{cases} (s+2)x + 3sy + (1-s)z = 2s \\ (1+3s)x + (5-s)y + 4sz = 3-s \end{cases}$$

Trovare $m_0, m_1 \in \mathbb{N}$ e $s_0 \in \mathbb{R}$ t.c.

$\dim(Es) = m_0$ per $s = s_0$ e $\dim(Es) = m_1$ per $s \neq s_0$.

m_1 = la dimensione tipica, cioè 1

m_0 = la dimensione eccezionale per il valore speciale s_0 di s che rende le equaz.

linearmente dipendenti.

(att: potrebbe accadere che le parti sovrapposte sono lin. dip ma le equazioni m_0 , e in tal

Caso viene $\emptyset$, non un piano) —

Trovare s_0 : impongo che $\text{rank} \begin{pmatrix} s+2 & 3s & 1-s \\ 1+3s & 5-s & 4s \end{pmatrix}$
sia 1
(+ verifica su termini noti) —

Potrei imporre tutti e tre i det 2×2 nulli;
invece ne impongo uno solo e poi sostituisco:
 $12s^2 - 5 + 6s - s^2 = 0$

$$s^2 + 6s - 5 = (s+1)(s-5)$$

$$s = -1 \quad \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & \vdots & -2 \\ -2 & 6 & -4 & \vdots & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \underline{\underline{OK}} \\ s = -1 \end{matrix}$$

$$s = 5/11 \quad \begin{pmatrix} 27/11 & 15/11 & \cdot & \vdots & \cdot \\ 26/11 & 50/11 & \cdot & \vdots & \cdot \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{No}}$$

$\swarrow \neq 0$
 $\searrow \neq 0$

$$(B) \quad F_t = \begin{pmatrix} 2 \\ t-1 \\ t+1 \end{pmatrix} + \text{Span} \begin{pmatrix} t+2 \\ t-2 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ t-2 \\ t-3 \end{pmatrix}$$

Trovare m_0, m_1, t_0 t.c.

$$\dim F_t = \begin{cases} m_0 & t = t_0 \\ m_1 & t \neq t_0 \end{cases}.$$

m_1 = dimensione tipica = 2

m_0 = dimensione eccezionale per il valore speciale

to di t che rende i vett. $\begin{pmatrix} t+2 \\ t-2 \\ t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \\ t-2 \\ t-3 \end{pmatrix}$

lin. dip.

Suppongo $\text{rank} \begin{pmatrix} t+2 & -t \\ t-2 & t-2 \\ t & t-3 \end{pmatrix} = 1$

$$(t-2)(t-3-t) = 0 \quad t=2$$

sostituisco $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ OK $t_0 = 2$