

Alg. Lim. 15/10/14

V sp. rett. $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ base se

- sono lin. indep.
- generano

Cioè:

ogni $v \in V$ si scrive in uno e un solo modo
come $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

Def: chiamo vetture delle coordinate di v

rispetto a B il vettore $[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$.

$\mathcal{E}_S$: In $\mathbb{R}^m$ ho la base canonica

$$\mathcal{E}_m = \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_1^{(m)}}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{e_2^{(m)}}, \dots, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{e_m^{(m)}} \right)$$

(spesso scrivo e_j invece di $e_j^{(m)}$ se m è chiaro).

$\mathcal{E}$ è una base:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \boxed{x_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \boxed{x_2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \boxed{x_m} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow [x]_{\mathcal{E}_m} = x$ (rispetto alla base canonica le coordinate di un vettore sono le sue componenti) —

$\mathcal{E}_5$: $\mathbb{R}^2, \mathcal{B} = \left(\underset{\vdots}{\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}}, \underset{\vdots}{\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}} \right)_2$ sono base:

devo provare che $\forall x \in \mathbb{R}^2$ esistono unici α, β t.c.

$$x = \alpha \cdot v + \beta w \quad \text{in } e^-$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{in } e^-$$

$$\begin{cases} 5\alpha + 7\beta = x_1 \\ 13\alpha - 3\beta = x_2 \end{cases}$$

$$3I + 7II \quad 106\alpha = 3x_1 + 7x_2$$

$$13I - 5II \quad 106\beta = 13x_1 - 5x_2$$

Soln. in e^-

$\Rightarrow e^-$ base

$$\alpha = \frac{3x_1 + 7x_2}{106}$$

$$\beta = \frac{13x_1 - 5x_2}{106}$$

$$\text{Inoltre } [x]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{106} \begin{pmatrix} 3x_1 + 7x_2 \\ 13x_1 - 5x_2 \end{pmatrix} -$$

$$\underline{\mathcal{E}} : M_{m \times m}(\mathbb{R})$$

$$\mathcal{E}_{m \times m} = (E_{ij})_{i=1 \dots m, j=1 \dots m}$$

dove E_{ij} ha coeff. 1 nel posto (i, j)
e 0 altrove.

$$\mathcal{E}_{3 \times 2} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$E_{11} \quad E_{12} \quad E_{21} \quad E_{22} \quad E_{31} \quad E_{32}$

Chiaro che $\bar{e}$ è una base:

$$[A]_{\mathcal{E}_{m \times m}} = (a_{ij})_{i=1 \dots m, j=1 \dots m}$$

Oss: $(e_j)_i = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Def: se x, y sono oggetti di un insieme S
(funzione di Kronecker):

$$\delta_{xy} = \begin{cases} 1 & \text{se } x=y \\ 0 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

cioè $(e_i)_i = \delta_{ij}$ - Inoltre:

$$(E_{ij})_{hk} = \begin{cases} 1 & \text{se } h=i \text{ e } k=j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

dunque

$$(E_{ij})_{hk} = \delta_{ik} \cdot \delta_{jk} -$$

$$\underline{\mathcal{E}_S}: \mathcal{R}_{\leq d}[t] = \{p(t) \in \mathcal{R}[t] : \deg(p(t)) \leq d\} -$$

$$\text{Base canonica: } \mathcal{B} = (1, t, t^2, \dots, t^d) - \text{Base:}$$

$$p(t) \in \mathcal{R}_{\leq d}[t] \Rightarrow p(t) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot t + a_2 \cdot t^2 + \dots + a_d \cdot t^d$$

$$\Rightarrow [p(t)]_{\beta} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} -$$

Oss: Non tutti gli spazi vett. hanno basi.

Azi:

Prop: $R[t]$ non ammette alcun insieme finito di generatori.

Dim: Sia per assurdo

$$\mathbb{R}[t] = \text{Span}(p_1(t), \dots, p_k(t))$$

(Es: Se fosse $\mathbb{R}[t] = \text{Span}(\sqrt{3}-e \cdot t + t^5, 9+t^2-t^9, 7+t+t^3)$
 allora ogni $p(t) \in \mathbb{R}[t]$ si potrebbe scrivere
 come $p(t) = \alpha \cdot (\sqrt{3}-e \cdot t + t^5) + \beta (9+t^2-t^9) + \gamma (7+t+t^3)$
 ad es è falso per t^2 -)

In generale $\deg(p_j(t)) = d_j$ - Se prendo

$d > \max \{d_1, \dots, d_k\}$ certamente

$t^d \notin \text{Span}(p_1(t), \dots, p_k(t))$. Ass. ▮

Teo : Se V ammette basi, due qualsiasi
basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

$$\underline{\mathcal{E}_S} : \mathbb{R}^2; \quad \mathcal{E}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right); \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

2 elementi

$$\underline{\mathcal{E}_S} : \left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ e \end{pmatrix} \right) \quad \text{sicuramente non \u00e9 base di } \mathbb{R}^2$$

$$\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ e \end{pmatrix} \right) //$$

Il teorema seguirà da questa proposizione:

Prop: se $v_1, \dots, v_h$ sono lin. indep. e
 $v_1, \dots, v_h \in \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$ allora $h \leq k$.

Cioè: "Nel generato da k vettori c'è spazio per al più k vettori lin. indep."

Deduciamo il teorema dalla prop:
Supponiamo di avere basi di V :

$$\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n) \quad \mathcal{C} = (y_1, \dots, y_m) -$$

Allora: $x_1, \dots, x_n \in V = \text{Span}(y_1, \dots, y_m)$

lin. indep. per le
prime proprietà di base di $\mathcal{B}$

per le seconde
proprietà di
base di $\mathcal{C}$

$\Rightarrow$ $n \leq m$ - Sostituendo i ruoli
Prop otterremo $m \leq n$

$\Rightarrow$ $m = m$ -



Grazie al teorema posso definire la dimensione
di V ,

$\dim_{\mathbb{R}}(V) =$ numero di elementi di
una qualsiasi base di V
se esiste

$\dim_{\mathbb{R}}(V) = +\infty$ se V non ha basi.

Prop: se $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ è una base di V le

$$\phi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad \phi_{\mathcal{B}}(v) = [v]_{\mathcal{B}}$$

è bijective e rispetta le operaz. di sp. vett.:

$$\phi_{\mathcal{B}}(0) = 0, \quad \phi_{\mathcal{B}}(v+w) = \phi_{\mathcal{B}}(v) + \phi_{\mathcal{B}}(w), \quad \phi_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \phi_{\mathcal{B}}(v)$$

(Cioè: "tramite $\phi_{\mathcal{B}}$ si identifica V con $\mathbb{R}^n$
come spazio vettoriale")

Dim: $\phi_{\mathcal{B}}$ iniettiva:

$$\phi_B(v) = \phi_B(w) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, [w]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n, \quad w = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$$

$$\Rightarrow v = w. \quad \checkmark$$

ϕ_B surjective:

$$\text{dato } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ posto } v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n,$$

$$\text{ho } [v]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \phi_B(v) = x.$$

$\phi_B(0) = 0$ significa $[0]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ infatti

$$0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_m$$

$$\phi_B(v+w) = \phi_B(v) + \phi_B(w) \quad ;$$

chiamo $x = \phi_B(v)$, $y = \phi_B(w)$;

devo vedere che $\phi_B(v+w) = x+y$.

$$x = \phi_B(v) \Rightarrow [v]_B = x \Rightarrow v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$$

$$y = \phi_B(w) \Rightarrow [w]_B = y \Rightarrow w = y_1 v_1 + \dots + y_m v_m$$

$$v+w = (x_1+y_1)v_1 + \dots + (x_n+y_n)v_n$$

$$\Rightarrow [v+w]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix} = x+y$$

$$\Rightarrow \phi_{\mathcal{B}}(v+w) = x+y$$

$$\phi_{\mathcal{B}}(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot \phi_{\mathcal{B}}(v) : \text{simile}$$



Con: Se V, W sono spazi vettoriali e
 $\dim_{\mathcal{R}}(V) = \dim_{\mathcal{R}}(W) < +\infty$ allora esiste $f: V \rightarrow W$

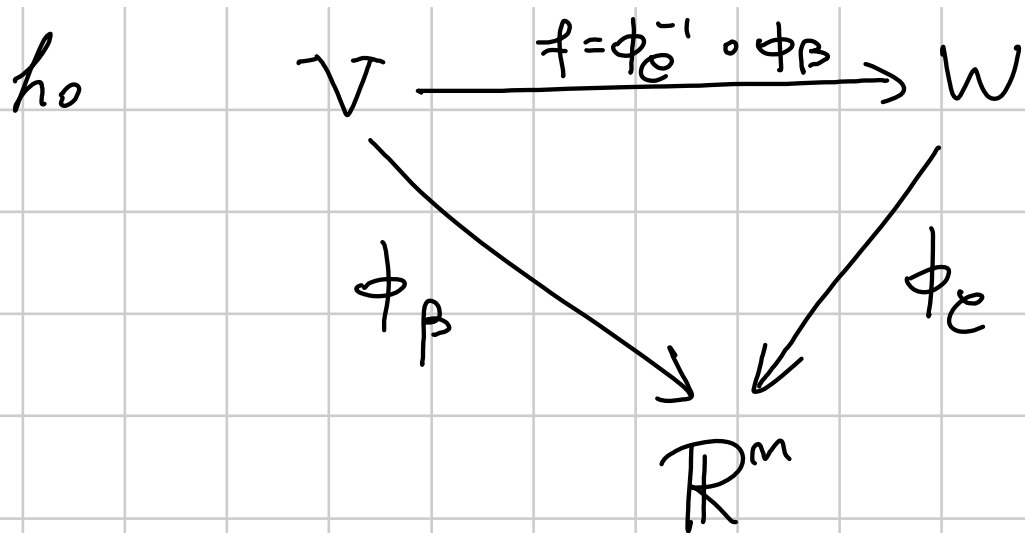
l'ipotesi che rispetta le operazioni:

$$f(0_V) = 0_W, \quad f(v_1 +_V v_2) = f(v_1) +_W f(v_2),$$

$$f(\lambda \cdot_V v) = \lambda \cdot_W f(v).$$

Dunque "Ve W sono uguali tra loro come spazi vettoriali se hanno la stessa dimensione"

Dim: prendo $B = (v_1 \dots v_m)$ base di V
 $C = (w_1 \dots w_m)$ base di W



□.



⑫ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^2$, $f(m) = (m^2, 3m+2)$ -

Injectiva? $f(m) = f(m) \not\Rightarrow m = m$

$(m^2, 3m+2) = (m^2, 3m+2) \not\Rightarrow m = m$

SI (guardare secondo compo)

Suriettiva? $\forall h, k \in \mathbb{N} \exists m \text{ t. } f(m) = (h, k)?$

$$\forall h, k \in \mathbb{N} \exists m \text{ t.c. } (h, k) = (m^2, 3m+2)$$

No : $(2, k)$ non è assunto
 $(h, 0)$ non è assunto

$$f^{-1}(\Delta) \quad \Delta = \{(m, m) : m \in \mathbb{N}\}$$

Devo trovare gli $m \in \mathbb{N}$ t.c. $f(m) \in \Delta$ cioè

$$(m^2, 3m+2) \in \Delta, \text{ cioè } m^2 = 3m+2, \text{ cioè}$$

$$m^2 - 3m - 2 = 0 \quad \text{cioè } m_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+8}}{2}$$

Nessun n ; dunque $f^{-1}(\Delta) = \emptyset$

(13) P = naturali pari D = naturali dispari

$f: P \rightarrow D$ bijective : $f(n) = n+1$
 $f^{-1}(n) = n-1$

$g: \mathbb{N} \rightarrow \underline{P}$: $g(n) = 2n$
 $g^{-1}(n) = n/2$

$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ = "contare usando $\mathbb{N}$ tutti gli elementi di $\mathbb{Z}$ "

$0, +1, -1, +2, -2, 3, -3, \dots$
 $\underset{0}{0}, \underset{1}{+1}, \underset{2}{-1}, \underset{3}{+2}, \underset{4}{-2}, \underset{5}{3}, \underset{6}{-3}, \dots$

$$f(n) = \begin{cases} -n/2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ (n+1)/2 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

⑭ Se X e Y hanno n elementi e $f: X \rightarrow Y$ iniettiva
 $\Rightarrow f$ surgettiva.

Per induzione su n :

p. base $n=1$ ok

p. induttivo: X', Y' con $n+1$ elementi
 $f': X' \rightarrow Y'$ iniettivo

Prendo $x_0 \in X'$, $y_0 = f'(x_0) \in Y'$ e noto che
 $f'(x) \neq y_0$ se $x \neq x_0$ perché f' è iniettivo
 $\Rightarrow$ posto $X = X' \setminus \{x_0\}$, $Y = Y' \setminus \{y_0\}$
posso definire $f: X \rightarrow Y$ come

$$f(x) = f'(x) \quad \forall x \in X$$

Quotlre f $\bar{e}$ iniettive e X, Y hanno n elementi

$\Rightarrow$ per ip. induttiva f $\bar{e}$ surgettiva

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} Y' \setminus \{y_0\} \subset \text{Im}(f') \\ y_0 \in \text{Im}(f') \end{array} \right\} \Rightarrow Y' \subset \text{Im}(f') \\ \text{cioe } f' \bar{e} \text{ surgettiva}$$

Se X e Y hanno n elementi e $f: X \rightarrow Y$
è surgettiva $\Rightarrow$ è iniettiva -

Infatti $\forall y \in Y$ scelgo $x \in X$ t.c. $f(x) = y$
e lo chiamo $g(y)$ - Ho trovato una
 $g: Y \rightarrow X$ t.c. $f \circ g = \text{id}_Y$

$\Rightarrow g$ è iniettiva $\Rightarrow$ (per sopra) è surgettiva,
dunque invertibile $\Rightarrow$
" $f \circ g \circ g^{-1} = \text{id}_Y \circ g^{-1}$

$$f \circ id_X = f$$

$$g \circ f^{-1}$$

$\Rightarrow f$ bijectiva.

(15) Fissiamo $k \in \mathbb{N}$ e definiamo sull'insieme $\{0, \dots, k-1\}$ le operazioni:

$$a \oplus b = \text{resto di } (a+b) : k$$

$$a \odot b = \text{resto di } (a \cdot b) : k$$

(Aritmetica modulo k .)

$$\underline{k = 7}$$

$$3 + 4 = 0$$

$$5 + 6 = 4$$

$$2 \cdot 5 = 3$$

Verificare che valgono tutte le proprietà di campo
tranne la 6; e la 6 vale $\Leftrightarrow k$ è primo.

Prova la 9 (distributivo): $(p \oplus m) \odot n = p \odot n \oplus m \odot n$

$$p+m = a \cdot k + b$$

$$b \cdot n = c \cdot k + d$$

$$(p \oplus m) \odot n = d$$

$$p \cdot n = t \cdot k + s$$

$$m \cdot n = w \cdot k + v$$

$$s+v = u \cdot k + z$$

$$(p \oplus m) \oplus m \odot n = z$$

$$c \cdot k + d = b \cdot n = (p+m-a \cdot k) \cdot n$$

$$= p \cdot n + m \cdot n - a \cdot n \cdot k$$

$$= t \cdot k + s + w \cdot k + v - a \cdot n \cdot k$$

$$= (t+w-a \cdot n) \cdot k + s+v$$

$$= (t+u - a \cdot n) \cdot k + n \cdot k + z$$

$$= (t+u - a \cdot n + n) \cdot k + z$$

$$\Rightarrow z = d \quad \text{puoi} \quad 0 \leq z, d < k$$

Se k non è primo, ad es $k=6$

$$2 \cdot 3 = 0$$

ovvero 2 e 3 non possono avere inversi:

$$\text{in generale se } k = a \cdot b \quad 1 < a, b < k$$

$\Rightarrow a \cdot b = 0$; se esistesse a^{-1} avremmo

$$a^{-1} \cdot (a \cdot b) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$

$$\begin{array}{c} \text{"} \\ (a^{-1} \cdot a) \cdot b = 1 \cdot b = b \end{array}$$

dunque l'assunto $b = 0$ _

Supponiamo ora che k sia primo _

Dovremo provare la 6, cioè che dato $a \neq 0$

$(0 < a < k)$ esiste a^{-1} cioè l'equazione
 $a \cdot x = 1$ ha soluzione -

Es: $k = 7$ $3^{-1} = 5$

$k = 11$ $4^{-1} = 3$

Posto $\phi_a : \{0, \dots, k-1\} \rightarrow \{0, \dots, k-1\}$

$$\phi_a : x \mapsto a \cdot x$$

baste provare che ϕ_a è surgettiva; grazie

⑭ baste vedere che è invertiva;

se $\phi_a(b) = \phi_a(c)$ ho

$$a \odot b = a \odot c$$

$$\Rightarrow a \odot (b - c) = 0$$

$\Rightarrow a \cdot (b - c)$ è divisibile per k

$\Rightarrow k$ divide a oppure $b - c$

(perché k è primo)

ma $1 \leq a < k$ quindi k non divide a

$\Rightarrow k$ divide $b - c$ ma $0 \leq b, c < k - 1$

$$\Rightarrow -(k - 1) < b - c < k - 1$$

$$\Rightarrow b - c = 0 \Rightarrow b = c$$



$$\textcircled{16} \quad F = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 : g(x) = 0\}$$

$$F \cup G = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0 \text{ oppure } g(x) = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 : u(x) = 0\}$$

$$u(x) = f(x) \cdot g(x) \quad (u = f \cdot g)$$

$$F \cap G = \{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) = 0 \text{ e } g(x) = 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}^2 : i(x) = 0\}$$

$$i(x) = |f(x)| + |g(x)|$$

Foglio 12/10

Ricordo: definiscono sottospazi le equaz. "buone"
 (polinom. omop. di grado 1) o guardate
 nelle componenti di vett/coeff. di matric/
 coeff di pol/valori di funz

$$\textcircled{1} \mathbb{R}^n: \sum_{j=1}^n \sqrt{j-1} \cdot x_j = 0 \quad \text{S.C.}$$

$$0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \sqrt{2} \cdot x_3 + \sqrt{3} \cdot x_4 + 2 \cdot x_5 + \dots = 0$$

$$\sum_{j=1}^n x_j^j = 0 \quad x_1 + x_2^2 + x_3^3 \dots = 0 \quad \text{No}$$

$$-(-1, 1, 0, \dots, 0) = (1, -1, 0, \dots, 0)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\in W}$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\notin W}$

$$x_1^2 = x_2^2 \quad \text{No; attention: } \text{se } x \in W \Rightarrow \exists \lambda. x \in W$$

$$\begin{array}{ccc} (1, 1) & + & (-1, 1) = (0, 2) \\ \cap & & \cap \\ W & & W \end{array} \quad \begin{array}{c} \notin \\ W \end{array}$$

$$x_1^3 = x_2^3 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \quad \text{Sü}$$

$$\cos(x_1 + \dots + x_n) = 1 \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_n = 2k\pi$$

$$\frac{1}{2} \cdot (2\pi, 0, \dots, 0) = (\pi, 0, \dots, 0)$$

~~A~~
W

~~A~~
W

ab

$$\textcircled{2} \quad M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$(A)_{k1} \cdot (A)_{m \cdot n} = 0 \quad \text{No} :$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

~~A~~
W

~~A~~
W

~~A~~
W

$\min\{m, n\}$

$$\sum_{j=1}^{\min\{m, n\}} (A)_{j, n+1-j} = 0$$

S_L

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$m=4 \quad n=5$

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\sqrt{i} - \sqrt{j}}{\sqrt{i} + \sqrt{j}} \cdot (A)_{ij} = 0$$

S_E

$$\sum (A)_{i,j}^2 = 0$$

N_S : Contradictions ...

$$\begin{matrix} A \\ \cap \end{matrix} + \begin{matrix} B \\ \cap \end{matrix} = \begin{matrix} C \\ \cap \end{matrix}$$

W W W

$$|(A)_{i,j}| \leq 7 \quad \forall i,j \quad \text{No}$$

$$3000 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \notin W$$

$\uparrow$
 W

③ $\mathbb{R}[t]$

$$p(-3) + p''(2) = 0$$

$$p(t) = \sum a_n t^n$$

$$a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 + 81a_4 + \dots +$$

$$2a_2 + 12a_3 + 48a_4 + \dots = 0$$

$$a_0 - 3a_1 + 11a_2 - 15a_3 + 129a_4 + \dots$$

$$= 0$$

S_2^-

$$p(1) \cdot p'''(-1) = 0 \quad \text{No (grade II in } a_0, a_1, \dots)$$

$$W = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : p(1) \cdot p^{(n)}(-1) = 0 \}$$

$$= \left\{ a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n : n \in \mathbb{N}, \right. \\ \left. a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}, \right. \\ \left. (a_0 + a_1 + a_2 + \dots) \cdot (6a_3 - 24a_4 + \dots) = 0 \right\}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \cdot t^n \cdot p^{(n)}(t) = 0$$

↑ equaglianza tra due polinomi

⇒ corrisponde all'equaglianza di tutti i coeff dei due poli

⇒ infinite equazioni.

in $a_0, a_1, a_2, \dots$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^n p^{(n)}(t) = 0$$

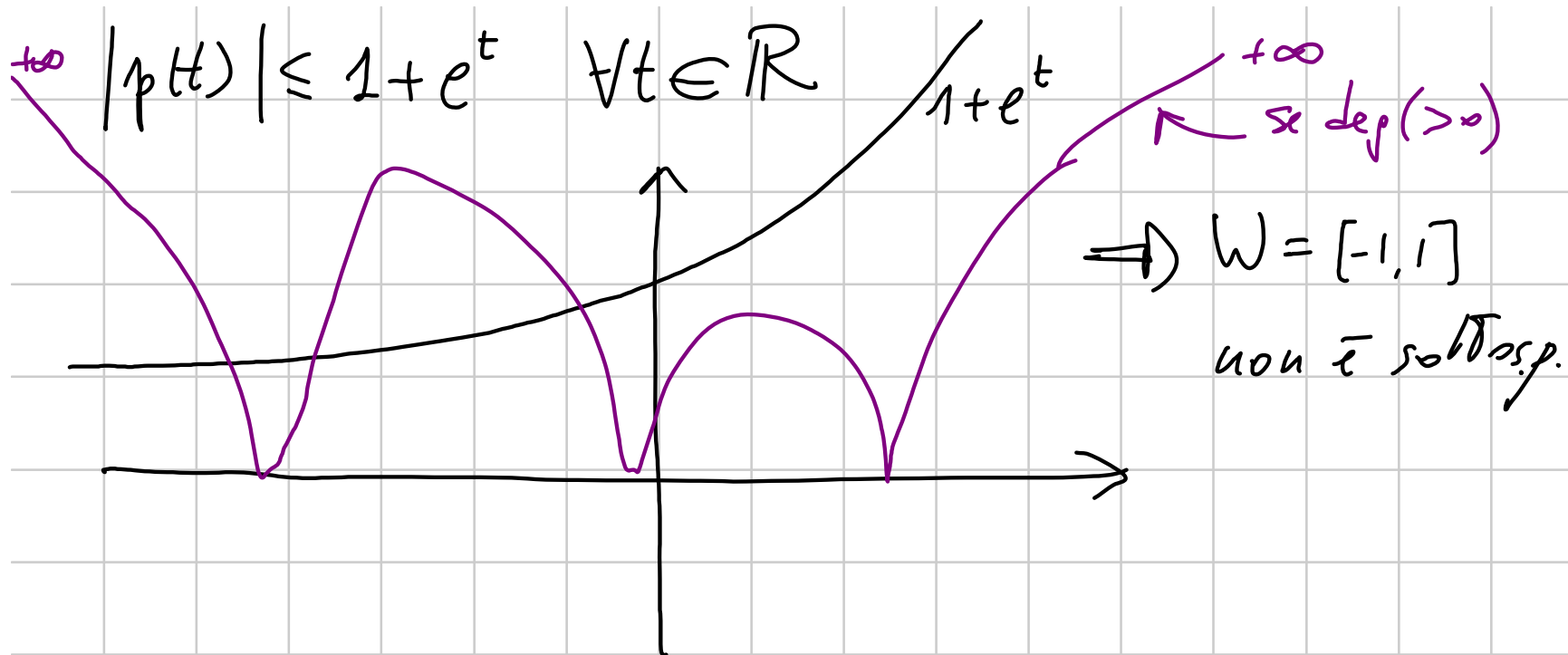
$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

$$\begin{aligned} & a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + \dots \\ - t \cdot & (a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + \dots) \\ + t^2 \cdot & (2a_2 + 6a_3 t + 12a_4 t^2 + \dots) \\ - t^3 \cdot & (6a_3 + 24a_4 t + \dots) \\ & \vdots \\ & \vdots \end{aligned} = 0$$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ \cancel{0 \cdot a_1 = 0} \\ a_2 = 0 \\ -2a_3 = 0 \\ -15a_4 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

(Verificare che le
j-esime eq. sono
 $\lambda_j \cdot a_j = 0$
con $\lambda_j \neq 0$ -)

$$\Rightarrow W \text{ sottosp, anzi } W = \{a_1 t : a_1 \in \mathbb{R}\} \\ = \text{Span}(t) \text{ -}$$



Invece $\{p(t) : |p(t)| \leq e^t \quad \forall t\} = \{0\}$ sottosp
banale

$$\deg (2p'(t) - 3t^2 p'''(t)) \leq 5$$



tutti i coeff. di t^k con $k \geq 6$ in
 $2p(t) - 3t^2 p'''(t)$ sono nulli

$$\begin{cases} 14a_7 - 630a_7 = 0 \\ 2 \cdot 8 \cdot a_8 + (-3) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot a_8 = 0 \\ 2 \cdot 9 \cdot a_9 + (-3) \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot a_9 = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad \begin{cases} a_7 = 0 \\ a_8 = 0 \\ a_9 = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

$$\Rightarrow W = \mathbb{R}_{\leq 6}[t]_-$$