

Alg. Lim. 14/10/14

Es (slsp/non-slsp) di: $\mathbb{R}[t]$ -

- dato $d > 0$ considero

$$\mathbb{R}_{=d}[t] = \{p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(p(t)) = d\}.$$

$$0 \notin \mathbb{R}_{=d}[t]$$

No: $\deg(0)$ non è d
(non definito) -

• $\{0\} \cup \mathbb{R}_{=d}[t]$: stsp?

- $0 \notin \dots$ s

- somma di due pol. di grado d ha grado d ? No

- multiplo numerico di un pol. di grado d ha grado d ? Sì
(o o...)

($d=3$ $(7 - 5t + 4t^2 - 18t^3) + (13 + 11t - t^2 + 18t^3)$).

No stsp

• $\mathbb{R}_{\leq d}[t] = \{p(t) : \deg(p(t)) \leq d\}$

è un sottospazio -

- $\{p(t) \in \mathbb{R}[t] : p(-2) = 0\}$

valutazione di $p(t)$ in $t = -2$

Se $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \dots$

$$p(-2) = 0 \Leftrightarrow a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 \dots = 0$$

equaz. "buona" = polinomio omog.
di grado 1
nei coeff di $p(t)$.

$\Rightarrow$ è un sottosp.

Oss: $Z, W \subset V$ sottospazi $\Rightarrow Z \cap W$ sottospazio.

- $\{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 7}[t] : p(\sqrt{3}) = 0, p(-71) = 0\}$

$\bar{e}$ $\cap$ di tre sottospazi di $\mathbb{R}(t)$

$\Rightarrow \bar{e}$ un step

Def: Se $p(t) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m t^m$ polino

$$p'(t) = \sum_{m=1}^{+\infty} m \cdot a_m \cdot t^{m-1} \quad (\text{derivate di } p(t))$$

- $\{p(t) \in \mathbb{R}[t] : p'(-3) = 0\}$

$$\text{Se } p(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

$$p'(-3) = 0 \Leftrightarrow a_1 - 6a_2 + 27a_3 - 108a_4 \dots = 0$$

equazione "buona"

$\Rightarrow \bar{e} \text{ stsp.}$

- $\{p(t) \in \mathbb{R}[t] : p'(2) + 5p''(-3) = 0, p'''(7) = 0\}$

$\bar{e}$ stsp.

$$\bullet \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : 3t^2 p'(t) + 5p(t) + p(1) = 0 \}$$

↑ moltiplicata tre
due polinomi

$$3t^2(a_1 + 2a_2t + 3a_3t^2 + 4a_4t^3 + \dots) +$$
$$+ 5(a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 + \dots)$$
$$+ (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) = 0$$

⇓

infinita equaz.
nei coeff.

$$\begin{cases} 6a_0 + a_1 + a_2 + \dots = 0 \\ 5a_1 = 0 \\ 3a_1 + 5a_2 = 0 \\ 6a_2 + 5a_3 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow \bar{e}$ stsp. (In realtà $\bar{e} \in \{0\}_-$)

V sp. vett. su $\mathbb{R}$

Comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$ con coeff $\alpha_1, \dots, \alpha_n$:

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

Visto: $\exists!$ minimo sp. vett. che contiene $v_1, \dots, v_n$
dato da tutte le loro comb. lin.

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \text{generato di } v_1, \dots, v_n$$

Q: ogni $v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ ha espr. unica
 $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$?

Q₀: $0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ ha l'unica espressione
 $0 = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n$?

Q_{ss}: $A = S\bar{I} \Rightarrow A_0 = S\bar{I}$ - Vale viceversa -

Def: diciamo che $v_1, \dots, v_n$ sono **lin. indep.**
se l'unica comb. lin. $\alpha v_1 + \dots + \alpha_n v_n$
che ha come risultato 0 è quella con
 $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ -

Prop. se $v_1, \dots, v_n$ sono lin. indep. allora ogni
 $v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$ ha espr. unica come
loro comb. lin.

Dim. devo vedere che se $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$
 $= \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$

allora $\beta_j = \alpha_j \quad \forall j$ - Gufoffi

$$(\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0$$

è una comb. lin. con risultato nullo

$\Rightarrow$ i coeff $\alpha_j - \beta_j$ sono tutti 0, cioè $\beta_j = \alpha_j \forall j$. $\square$

Es: (v_1) è lin. indep. se l'unica espressione
A. v_1 che vale 0 è quella con $\lambda = 0$.

Se $v_1 = 0$ no: $\sqrt{479} \cdot v_1 = 0$.

Se $v_1 \neq 0$ sì: visto che $\lambda \neq 0$ e $v_1 \neq 0$ allora $\lambda \cdot v_1 \neq 0$.

Monde: (v_1) è lin. indep. $\Leftrightarrow v_1 \neq 0$.

Oss: Se $(v_1, \dots, v_m)$ è lin. indep. allora qualsiasi

suo sottoinsieme $\bar{e}$ lin. indep. In particolare
se qualcuno dei v_i è nullo non possono essere
lin. indep.

E5: In $\mathbb{R}^2$:

$$\bullet v_1 = \begin{pmatrix} 74 \\ 3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 96 \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Sono lin. indep? Cioè:

Gli unici $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.c. $\alpha \cdot \begin{pmatrix} 74 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 96 \\ \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

solo $\alpha=0$ e $\beta=0$? Cioè:

$$\begin{cases} 74\alpha + 36\beta = 0 \\ 3\alpha + \pi\beta = 0 \end{cases} \quad \text{è l'unica solut. } \alpha=0 \text{ e } \beta=0?$$

$$\alpha = -\frac{\pi}{3}\beta$$

$$-\frac{74}{3}\pi\beta + 36\beta = 0$$

$$\underbrace{(-74\pi + 288)}_{>0} \cdot \beta = 0$$

$$\Rightarrow \beta=0 \Rightarrow \alpha=0 \quad \text{Sì}$$

Es: $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \end{pmatrix}$

(v_1, v_2, v_3) è lin. indep.? Cioè

$$\begin{cases} 5\alpha - 3\beta - 8\gamma = 0 \\ 2\alpha + 6\beta - \gamma = 0 \end{cases} \quad \text{ha l'unica soluz.} \quad \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{matrix} ?$$

$$\begin{cases} \gamma = 2\alpha + 6\beta \\ 5\alpha - 3\beta - 18\alpha - 54\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 13\alpha - 57\beta = 0 \\ \gamma = 2\alpha + 6\beta \end{cases}$$

No! $\alpha = 57, \beta = 13, \gamma = \dots$

È una soluz. non nulla $\Rightarrow$ sono lin. dip.

• $v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \end{pmatrix}$

lin. indip.?

$$\alpha \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -15 \\ 10 \end{pmatrix} = 0 \quad \nrightarrow \quad \alpha = \beta = 0$$

$$\begin{cases} 9\alpha - 15\beta = 0 \\ -6\alpha + 10\beta = 0 \end{cases} \quad \text{has the unique soln? } \alpha = \beta = 0?$$

$$\begin{cases} 3\alpha - 5\beta = 0 \\ 3\alpha - 5\beta = 0 \end{cases}$$

No: ad en. c'è la soln:
 $\alpha = 5, \beta = 3$ non nulla

(oppure :
 $\alpha = \frac{\sqrt[3]{431}}{\pi}, \beta = \frac{3\sqrt[3]{431}}{5\pi})$

Qss: $v_2 = -\frac{5}{3}v_1$

Lemma: (v_1, v_2) sono lin dipendenti $\Leftrightarrow$ uno dei due
è multiplo dell'altro -
(comprende il caso di uno dei due nullo) -

Dlm: $\Leftrightarrow : v_2 = \alpha \cdot v_1$ oppure $v_1 = \alpha \cdot v_2$

$\Downarrow$ $\Downarrow$

$\alpha \cdot v_1 - 1 \cdot v_2 = 0$ $1 \cdot v_1 - \alpha \cdot v_2 = 0$

↑ ↑

comb. lin. con risultato 0
e coeff non tutti 0 -

$\Rightarrow$: $\exists \alpha_1 \alpha_2$ non entrambi nulli t.c.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$$

$\nearrow \alpha_1 \neq 0 \quad v_1 = \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \cdot v_2$

$\searrow \alpha_2 \neq 0 \quad v_2 = \left(-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \cdot v_1$



Qss: bisognerebbe dire:

$(v_1, \dots, v_m)$ è un sistema di vettori lin. indep.

Non $v_1, \dots, v_m$ sono lin. indep.

1
Scometto padre la proprietà
non è di ciascuno di loro ma
di loro come insieme -

(In pratica, si dice lo stesso -)

Def: $(v_1, \dots, v_m)$ insieme finito e ordinato di
vettori di V si dice base di V se

- $v_1, \dots, v_m$ generano V
- $v_1, \dots, v_m$ sono lin. indep.

Cioè: $(v_1, \dots, v_n)$ è base di V se ogni $v \in V$
si scrive in uno e un solo modo comp

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

generano

lin. indep.

Ordinato: l'ordine conta; ad es.

$$(v_1, v_2, v_3) \neq (v_3, v_1, v_2)$$

$[(v_1, \dots, v_n) \text{ generano } V \text{ significa che il sottospazio}$
 $\text{da essi generato è } V, \text{ cioè che}$
 $\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = V.]$

Esercizio - Primo foglio

(8) $f(t), g(t) \in \mathbb{R}[t], p(t) \neq 0$

$\Rightarrow \exists! q(t), r(t) \in \mathbb{R}[t] \text{ t.c.}$

$f(t) = g(t) \cdot q(t) + r(t), \deg(r(t)) < \deg(g(t)).$

Casi facile: $\deg(g(t)) = 0$; e più in generale
 $\nexists q(t) \text{ t.c. } f(t) = g(t) \cdot q(t)$ —
(in tal caso $r(t) = 0$) —

Esistenza negli altri casi: considero

$$\{ \deg(f(t) - g(t) \cdot q(t)) : q(t) \in \mathbb{R}[t] \}$$

è soluzione $\neq \emptyset \subseteq \mathbb{N} \Rightarrow$ ha minimo —

Sia $q(t)$ quello che realizza il min. e

$$r(t) = f(t) - g(t) \cdot q(t) \quad \text{Devo vedere che}$$

$$\deg(r(t)) < \deg(g(t)) \quad \text{Per assurdo:}$$

$$g(t) = a_m \cdot t^m + (\text{quello più basso})$$

$$q(t) = b_{m+k} \cdot t^{m+k} + (\text{quello più basso})$$

$$\text{Poi po } q'(t) = q(t) + \frac{b_{m+k}}{a_m} t^k ;$$

$$r'(t) = f(t) - g(t) \cdot q'(t)$$

$$= f(t) - g(t) \cdot \left(q(t) + \frac{b_{m+k}}{a_m} \cdot t^k \right)$$

$$= (f(t) - g(t) \cdot q(t)) - (a_m t^m + \dots) \cdot \frac{b_{m+k}}{a_m} t^k$$

$$\overbrace{\pi(t)}^{=}$$

$$b_{m+k} t^{m+k} + (\dots) - b_{m+k} t^{m+k} + (\dots)$$

$\Rightarrow \deg(\pi'(t)) < \deg(\pi(t))$: annulo _

Unicidade :

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t) \cdot q_1(t) + \pi_1(t) & \deg(\pi_1) < \deg(g) \\ &= g(t) \cdot q_2(t) + \pi_2(t) & \deg(\pi_2) < \deg(g) \end{aligned}$$

$$\underbrace{g(t) \cdot (q_1(t) - q_2(t))}_{\text{blue}} = \underbrace{\pi_2(t) - \pi_1(t)}_{\text{purple}}$$

$g_1(t) = g_2(t)$
 e in tal caso
 ovviamente
 $g_2(t) \Rightarrow g_1(t)$ e ho finito;
 oppure $\deg(\dots) \geq \deg(g(t))$

$$\deg(\dots) < \deg(g)$$



⑨ Posto $\begin{cases} F_0 = 0, F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$

$$\tilde{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Provo che $\tilde{F}_n = F_n \quad \forall n$.

Basta vedere che

$$\tilde{F}_0 = 0 \quad \checkmark$$

$$\tilde{F}_1 = 1 \quad \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = 1 \quad \checkmark$$

$$(*) \quad \tilde{F}_{n+2} = \tilde{F}_n + \tilde{F}_{n+1} \quad (\text{tra un attimo})$$

Basta: formalizzarlo per induzione completa _

Per provare (*) osservo che $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \lambda_{1,2}$ sono le radici dell'equazione

$$\lambda^2 = 1 + \lambda$$

$$\left(\lambda^2 = 1 + \lambda \iff \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \right)$$

quindi: $\tilde{F}_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n$ (dove $\alpha_1 = 1/\sqrt{5}$
 $\alpha_2 = -1/\sqrt{5}$)

Ora: $\tilde{F}_{n+2} = \alpha_1 \lambda_1^{n+2} + \alpha_2 \lambda_2^{n+2}$

$$= \alpha_1 \lambda_1^n \cdot \lambda_1^2 + \alpha_2 \lambda_2^n \cdot \lambda_2^2$$

$\parallel$ $\parallel$
 $1 + \lambda_1$ $1 + \lambda_2$

$$= \underbrace{\alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n}_{\tilde{F}_n} + \underbrace{\alpha_1 \lambda_1^{n+1} + \alpha_2 \lambda_2^{n+1}}_{\tilde{F}_{n+1}}$$

□

⑩ $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ è intero $\forall n \in \mathbb{N}$ ed è $\sum_{i=0}^n i^2$ -

Inter: $n(n+1)(2n+1)$ è divisibile per 6 :

$n(n+1)(2n+1)$ è divisibile per 2 : n o $n+1$ pari
e per 3 :

se né n né $n+1$ sono div. per 3

allora $n = 3k+1 \Rightarrow$

$$2n+1 = 6k+2+1 = 3(2k+1)$$

è div. per 3 -

Prove by $\sum_{j=0}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ by induction.

$$n=0 \quad 0=0 \quad \text{OK}$$

PI.

$$\sum_{j=0}^{n+1} j^2 = \sum_{j=0}^n j^2 + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{n+1}{6} \cdot (2n^2 + n + 6n + 6) = \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6)$$

Devo vedere che vale

$$\frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6} =$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

OK!

⑪ $\{0,1\}$

$$0 \oplus 0 = 1 \oplus 1 = 0$$

$$0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1$$

$$0 \odot 0 = 0 \odot 1 = 1 \odot 0 = 0$$

$$1 \odot 1 = 1$$

È un campo: 1-4 ($\oplus$ grupp. add.)
 5-8 ($\odot$ è gruppo add. $\neq 0$)
 9 distributiva

5. 1 è l'identità per $\cdot$
 $1 \cdot x = x \quad \forall x$

$$1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 1$$

$$8. \quad x \odot y = y \odot x \quad \forall x, y$$

Ovvio se $x = y$; se no

$$\begin{array}{ccc} 001 & \neq & 100 \\ \parallel & & \parallel \\ 0 & & 0 \end{array}$$

✓

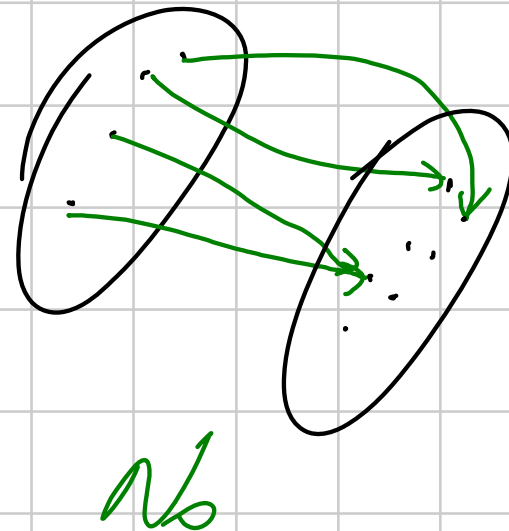
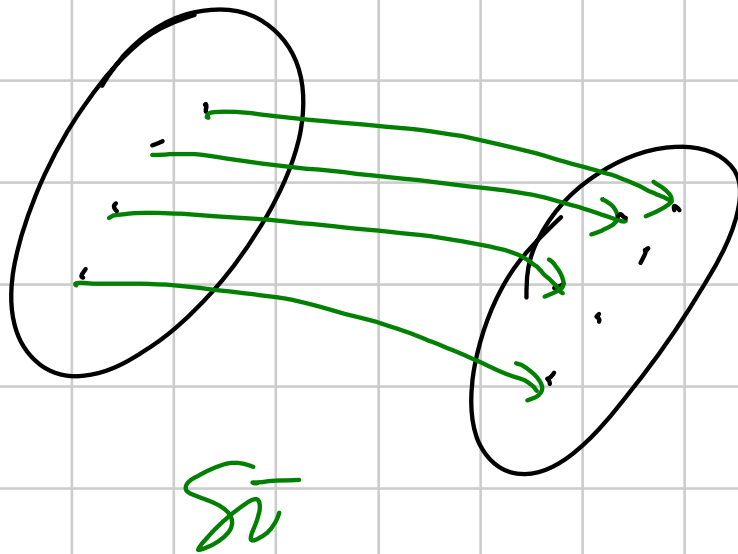
$$f: X \rightarrow Y$$

dominio

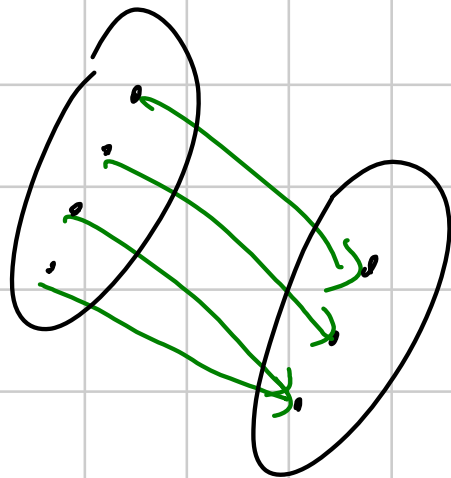
codominio

legge che associa a ogni el. del dominio
uno del codominio -

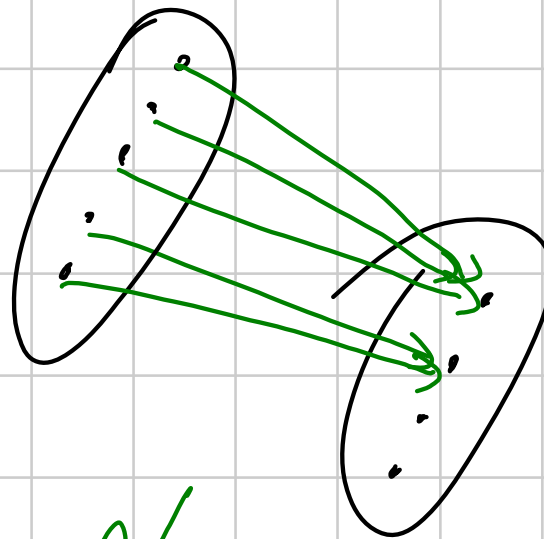
- f è iniettiva se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
(oppure $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$)



- f é surjetiva se $\forall y \in Y \exists x \in X$ t.c. $f(x) = y$.



Sim



Não

- f é bijetiva se injetiva e surjetiva

- $$\text{Im}(f) = \{f(x) : x \in X\}$$

$$= \{y \in Y : \exists x \in X \text{ con } f(x) = y\}$$

(immagine)

- Dato $A \subset Y$

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$$

controimmagine di A -

Qss: f è iniettiva se e solo
se $f'(y)$ è di più un punto $\forall y \in Y$

Qss: f è surgettiva se e solo se $\text{Im}(f) = Y$
cioè se $f'(y)$ è almeno un punto $\forall y \in Y$

Qss: f è biettiva $\iff f'(y)$ è esattamente un
punto $\forall y \in Y$

Def. $f: X \rightarrow Y$ si dice invertibile se esiste
 $g: Y \rightarrow X$ t.c.

$g \circ f: X \rightarrow X$ è la funzione id_X
 $(\text{id}_X(x) = x \quad \forall x \in X$

e $f \circ g: Y \rightarrow Y$ è id_Y -

Quel caso si dice inverse di f , indicata f^{-1} -

Oss: f è invertibile $\Leftrightarrow$ è biettiva.

E in tal caso $f^{-1}(y)$ è l'unico punto x di X
t.c. $f(x) = y$.