Esercitazioni Alg. Lin 12/11/2014

CONTINUA ES. 6 FOGLIO 4

$$\begin{cases} b x_1 - b x_4 + (d-e) x_2 = 0 \\ c x_1 - c x_4 + (d-e) x_3 = 0 \\ c x_2 - b x_3 = 0 \end{cases}$$

$d \neq e$ Riduco a sistema di 2 equazioni

$$\begin{cases} b x_1 - b x_4 + (d-e) x_2 = 0 \\ c x_1 - c x_4 + (d-e) x_3 = 0 \end{cases}$$

$\dim \geq 2$

$d = a$

$$\begin{cases} b(x_1 - x_4) = 0 \\ c(x_1 - x_4) = 0 \\ c x_2 - b x_3 = 0 \end{cases}$$

se $b \neq 0$

1^a eq non banale

2^a eq dipende dalla 1^a

$$W = \left\{ x : x_1 = x_4 , \; x_3 = \frac{c}{b} x_2 \right\}$$

$\dim W = 2$

se $b = 0$, $c \neq 0$

$W = \{x : x_1 = x_4 , x_2 = 0\}$ dim $W = 2$

se $b = 0$, $c = 0$ $\Rightarrow$ nessuna condizione

$W = M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ cioè A è multiplo di Id

---

Vediamo meglio il caso $d = a$

$\varphi : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b x_1 + (d-a) x_2 - b x_4 \\ c x_1 + (d-a) x_3 - c x_4 \end{pmatrix}$$

$W = \operatorname{Ker} \varphi$

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d-a \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\varphi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d-a \end{pmatrix}$$

sono indipendenti

$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} \varphi = 2 \iff \dim \operatorname{Ker} \varphi = 2$

e quindi $\dim W = 2$

quindi $W = \{ X : AX = XA \}$

non può avere $\dim W = 3$

Esercizio 7

$$V = W \oplus Z$$

p proiezione su W, q proiezione su Z

(e) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Z = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

W e Z sono in somma diretta perché generati da due vettori indip. in $\mathbb{R}^2$.

chi è p?

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ $\quad v = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$p\,v = a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ chi è a ?

$$\begin{cases} x_1 = 2a - 3b \\ x_2 = a + 2b \end{cases}$$

$2\,\mathrm{I} + 3\,\mathrm{II}$

$2x_1 + 3x_2 = 7a$ $\qquad a = \frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2$

$$p(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\frac{2}{7} x_1 + \frac{3}{7} x_2 \right)$$

$$p\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/7 & 6/7 \\ 2/7 & 3/7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$q = ? \qquad p + q = \mathrm{Id}_V$$

$$q = \mathrm{Id}_V - p$$

$$q(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{2}{7} x_1 + \frac{3}{7} x_2 \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 - 4/7\, x_1 - 6/7\, x_2 \\ x_2 - 2/7\, x_1 - 3/7\, x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/7\, x_1 - 6/7\, x_2 \\ -2/7\, x_2 + 4/7\, x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/7 \\ -2/7 \end{pmatrix} (x_1 - 2x_2)$$ che è multiplo di $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $w = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad Z = \{x : 5x_1 + 2x_2 = 0\}$

$\boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} \in Z \text{ ed è indip. da } \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ quindi } V = Z \oplus W}$

$$v = \underbrace{a \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\substack{\shortparallel \\ p(v)}} + \underbrace{z}_{\substack{\shortparallel \\ q(v)}} \qquad z \in Z$$

$p(v) = ?$ trovo $a \in \mathbb{R}$ tale che

$$v - a \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \in Z$$

cioè se $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ chiedo che

$\begin{pmatrix} x_1 - a3 \\ x_2 + a \end{pmatrix}$ stia in Z

ovvero: $5(x_1 - 3a) + 2(x_2 + a) = 0$

e trovo a: $-15a + 2a = -5x_1 - 2x_2$

$$a = \frac{5}{13} x_1 + \frac{2}{13} x_2$$

$$P(v) = \left(\frac{5}{13} x_1 + \frac{2}{13} x_2\right) \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$p(v) = v - q(v) =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15/13\, x_1 + 6/13\, x_2 \\ -5/13\, x_1 - 2/13\, x_2 \end{pmatrix} \quad \ldots$$

(d) $V = \mathbb{R}^3$ $\quad W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ $\quad Z = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$W \cap Z = \{0\}$ (lo verifico mettendo a sistema)

$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in V$ $\quad p(v) = ?$ $\quad q(v) = ?$

$v = p(v) + q(v)$

$$v = \underbrace{a\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix}}_{= p(v)} + \underbrace{c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}}_{= q(v)}$$

risolvo trovando a, b, c e quindi posso scrivere p, q. Oppure noto che

$$W = \{x : x_1 - 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 0\}$$

Posso trovare c tale che

$$v - c\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \in W$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - c \\ x_3 + c \end{pmatrix} \in W \qquad x_1 - 2(x_2 - c) + \frac{1}{3}(x_3 + c) = 0$$

$$2c + \frac{1}{3}c = -x_1 + 2x_2 - \frac{1}{3}x_3$$

$$c = \frac{3}{7}\left(-x_1 + 2x_2 - \frac{1}{3}x_3\right)$$

$$\varphi(v) = c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$ e mi basta sostituire

$$\varphi(v) = \frac{3}{7}\left(-x_1 + 2x_2 - \frac{1}{3}x_3\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$p(v) = v - q(v)$

(e) analogo a (d)

$W \cap Z = \{0\}$ perché

$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ non soddisfa $5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0$

$p(v) = v - c\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ e impongo che stia in W

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in W$$

$$5(x_1 - 3c) - 3(x_2 - c) + 2(x_3 + 2c) = 0$$

e ricavo c

$$\varphi(v) = c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Foglio 5 (9/XI/2014)

Esercizio 1

$\dim V = n$

$\dim W = m$ $\qquad n \geq m$

Sia $\{e_1, \dots, e_n\} = \mathcal{B}$ una base di V

Sia $\{h_1, \dots, h_m\} = \mathcal{B}'$ una base di W

Definisco $f : V \to W$ sulla base $\mathcal{B}$

$$
\begin{cases}
f(e_1) = h_1 \\
f(e_2) = h_2 \\
\vdots \\
f(e_m) = h_m \\
f(e_{m+1}) = 0 \\
\vdots \\
f(e_n) = 0
\end{cases}
$$

qui intendo $0 \in W$
potevo scegliere qualsiasi
valore in W

chi è $\operatorname{Im} f$?

Im f è generata dai f(vettori della base di V), quindi è generata da $h_1, \dots, h_m, f(e_{m+1}), \dots$
$\dots, f(e_n)$

$\Rightarrow \operatorname{Im} f = W$

$$g : \begin{cases} h_1 \longmapsto e_1 \\ \vdots \\ h_m \longmapsto e_m \end{cases}$$

$f \circ g = Id_W$

$$\underbrace{h_i \xmapsto{g} e_i \xmapsto{f} h_i}_{Id_W}$$