

Alg. Lin. 11/11/14

Fatto: a) $f: V \rightarrow W$ lineare può essere invertibile
solo se $\dim V = \dim W$

b) se $\dim V = \dim W$, f iniettiva $\Leftrightarrow f$ surgettiva.

Def: matrice identità $n \times n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obs: $A \in M_{m \times n} \Rightarrow A \cdot I_n = A$

$$\begin{pmatrix} \boxed{a_{i1} \dots a_{ij} \dots a_{in}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} i \\ \vdots \\ \boxed{a_{ij}} \dots \end{matrix} \end{pmatrix}_j$$

Analogamente $B \in M_{m \times k} \Rightarrow I_m \cdot B = B$

In particolare alla matrice $I_n \in M_{n \times n}$ è associata l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ x & \longmapsto & x \end{array} \quad \text{cioè } \text{id}_{\mathbb{R}^n}$$

Oss: $\dim V = n$, $\mathcal{B}$ qualsiasi base di V

$$\Rightarrow [id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = I_n$$

poiché $id_V(v_j) = v_j = 0 \cdot v_1 + \dots + 1 \cdot v_j + \dots + 0 \cdot v_n$

$\Rightarrow j$ -esima colonna $\bar{e}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ -

Attenzione: $[id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ non $\bar{e}$ I_n -

Def: diciamo che una matrice è invertibile se lo è come applicazione lineare. Cioè:

•) $A \in M_{m \times n}$ può essere invertibile solo se $m = n$
(quadrata)

•) $A \in M_{n \times n}$ è invertibile se esiste B t.c.
 $B \cdot A = A \cdot B = I_n$ - Dopo $B = A^{-1}$

Oss: se $B \cdot A = I_n$ allora A è invertibile

$$e \quad B \cdot A \cdot A^{-1} = I_n \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

$$B \cdot I_n = B \quad \Rightarrow B = A^{-1}$$

Analogamente $A \cdot B = I_n \Rightarrow B = A^{-1}$

Cioè: "l'inversa da uno dei due lati di A
quadrato è automaticamente l'inversa"

Attenzione: esistono $A \in M_{m \times m}$, $B_{m \times m}$ t.c.
 $A \cdot B = I_m$

ma $m \neq n \Rightarrow A, B$ non sono invertibili)

Q: come cambiano $[v]_B$ e $[f]_B^c$

cambiando B e B, C ?

Def: chiamo matrice di cambio di base da
 $B = (v_1, \dots, v_m)$ a $B' = (v'_1, \dots, v'_m)$

la matrice M t.c.

$$(*) \quad v'_j = \sum_{i=1}^m m_{ij} \cdot v_i \quad M = (m_{ij})$$

cioè $\underline{M} = [\text{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}}$ -

Oss: se usiamo formalmente le regole del prodotto righe $\times$ colonne la (*) si scrive come

$$v'_j = (\underbrace{v_1, \dots, v_m}_{\text{non solo numeri e ok lo sono}}) \cdot \begin{pmatrix} m_{1j} \\ \vdots \\ m_{mj} \end{pmatrix} -$$

non solo numeri e ok lo sono

anzi:

$$\rightarrow (v'_1, \dots, v'_m) = (v_1, \dots, v_m) \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{m1} & \dots & m_{mm} \end{pmatrix}$$



$$\boxed{B' = B \cdot M}$$

def. sintetica della
matrice di cambio
di base da B a B'

se $V = \mathbb{R}^n$ questa è una
identità tra matrici $n \times n$

Prop: se M è la matrice di cambio di base da B a B'
allora M è invertibile e M^{-1} è la matr. di
cambio di base da B' a B

Dim: sia X la matr. di cambio di base da B' a B

Ho: $B' = B \cdot M$

$$B = B' \cdot X$$

$\Rightarrow B = B \cdot (M \cdot X)$ dunque $M \cdot X$ è la matrice di
 cambio da B a $B \Rightarrow M \cdot X = I_m$ -
 Analogamente $X \cdot M = I_m$ 

Richiamo: $[v]_B$ sono quel vettore x di $\mathbb{R}^m$ t.c.
 $v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$ -

Come sopra posso riscrivere:

$$v = (v_1, \dots, v_m) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

se $v = \mathbb{R}^n$ è uno
 identico
 $n \times 1 = (n \times n) \cdot (n \times 1)$

ovvero $v = B \cdot x$ — Dunque posso dare la def.:

$[v]_B$ è quel vettore di $\mathbb{R}^n$ (unico) t.c. $v = B \cdot [v]_B$

Prop.: se M è la matrice di cambio da B a B'
allora $[v]_{B'} = M^{-1} \cdot [v]_B$ —

Dim.: $B' = B \cdot M$ e $B = B' \cdot M^{-1}$:

$$v = B \cdot [v]_B = (B' \cdot M^{-1}) \cdot [v]_B = B' \cdot (M^{-1} \cdot [v]_B)$$

$$\Rightarrow [v]_{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}} -$$

$\cap$
 $\mathbb{R}^n$



Ex: $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, $v = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{29}{17} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{16}{17} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 29/17 \\ -16/17 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} = -15 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - 41 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -15 \\ -41 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot M^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = -11 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - 29 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & -4 \\ -29 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} - 9 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Verifikation der $[v]_{\mathcal{B}'} = M^{-1} [v]_{\mathcal{B}}$:

$$\begin{pmatrix} -11 & -4 \\ -29 & -9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 29/17 \\ -16/17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ -41 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{OK}}$$

Richiamo: la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$

$$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$$

$$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$$

è quella matrice A t.c.

$$f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i;$$

Come sopra lo riscriviamo come:

$$f(v_j) = (w_1, \dots, w_m) \cdot \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} f(v_1), \dots, f(v_m) \end{pmatrix}}_{\parallel} = \underbrace{\begin{pmatrix} w_1, \dots, w_m \end{pmatrix}}_{\mathcal{C}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}}_A$$

$$\underbrace{f \cdot (v_1, \dots, v_m)}_{\mathcal{B}}$$

nuovo

Cioè: def. sintetica di $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$: $\bar{e}$ quella matrice
t.c. $f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

↑ se $V = \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}^m$, $f \in M_{m \times m}$
é uma identidade

$$(m \times m) \cdot (m \times m) = (m \times m) \cdot (m \times m) -$$