Es. Alg. Lin. 10/12/2014

Es 10 (del 27/11/2014) $\qquad E = v_0 + W$

(m)

$$E = \begin{cases} 3x - 2y + 4z + w = -1 \\ 2x + 5y - 3z + 4w = 3 \\ 5x - 16y + 18z - 5w = -9 \end{cases}$$

I° e II° eq. sono indipendenti

$$\det \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & -3 \\ 5 & -16 & 18 \end{vmatrix} = 3 \cdot (90 - 48) + 2(36 + 15) + 4(-32 - 25) =$$

$$= 3 \cdot 42 + 2 \cdot 51 - 4 \cdot 57 =$$

$$= 126 + 102 - 228 = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 5 & -16 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-25 + 64) + 2(-10 - 20) + 1(-32 - 25) =$$

$$= 3 \cdot 39 - 60 - 57 = 0$$

Per t. degli orlati:

$rk = 2 \Rightarrow \dim W = 2$

cerco v. nello spazio definito dalle prime 2 eq.

cerco nella forma $v_0 = (a, b, 0, 0)$

$3a - 2b = -1$

$2a + 5b = 3$ $\qquad$ $\det \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19$

$a = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} / 19 = 1/19$

$b = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} / 19 = 11/19$

$$\frac{3}{19} - \frac{22}{19} = -1$$

$$\frac{2}{19} + \frac{55}{19} = 3$$

verifico se $v_0 = \left(1/19 , 11/19 , 0 , 0 \right)$

soddisfa $5x - 16y + 18z - 5w = -9$

$$\frac{5}{19} - \frac{176}{19} = -9$$

$$-171 = -9 \cdot 19 \implies$$

la terza eq affine è dipendente dalle prime tre

$E \neq \emptyset \implies \dim E = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$ ← coeff delle prime 2 eq. lineari

$$v_1 = \left(\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}, 0 \right)$$

$$v_2 = \left(0, \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \right)$$

$$E = v_0 + \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

(n)

$$E = \begin{cases} 4x - y + 2z + w = 3 \\ 2x + 3y - 5z + 4w = 2 \\ 2x - 4y + 7z - 3w = 5 \end{cases}$$

analogo al precedente:

$$\det \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \\ 2 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 24 + 2(-14) = 0$$

$$\det \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

(o)

$$\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-13) + 1 \cdot 7 + 2 \cdot 11 =$$

$$\neq 0$$

Cerco vettore v_1 in giacitura di E

$$\det \begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 3 & -6 \\ -1 & 5 & 2 & -4 \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = 0 \quad \text{se } (a,b,c,d) \text{ è } 1^{a}, 2^{a} \text{ o } 3^{a} \text{ riga}$$

$$a \overbrace{\begin{vmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -6 \\ 5 & 2 & -4 \end{vmatrix}}^{x_1} - b \overbrace{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 2 & 3 & -6 \\ -1 & 2 & -4 \end{vmatrix}}^{-y_1} + c \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & 5 & -4 \end{vmatrix}}_{z_1} + $$

$$- d \underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix}}_{-w_1} \quad \text{si annulla se } (a,b,c,d) \text{ è } 1^{a}, 2^{a} \text{ o } 3^{a} \text{ riga}$$

$\Rightarrow v_1 = (x_1, y_1, z_1, w_1) =$

$= (13, 7, 35, 23)$

devo trovare $v_0 \in E$

pongo $w_0 = 0$ x det del primo minore è $\neq 0$ e

risolvo

$$\begin{cases} 4x - y + 2z = 3 \\ 2x + y + 3z = 3 \\ -x + 5y + 2z = 4 \end{cases}$$

$\leftarrow$ si risolve come al solito

$\rightarrow$ trovo v_0

$$E = v_0 + \operatorname{span}(v_1)$$

$$= \{ v_0 + t\, v_1 \}$$

$$\dim E = 1$$

Foglio 6/12/2014

Es 1

(e) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ $\quad E = v_0 + W$

$F = \{ 3x - 5y + 2z = 7 \}$ $\quad F = w + Z$

$\dim E = 1 \qquad \dim F = 2$

$\dim E \cap F = ?$

- $\emptyset$ $\quad \dim = -1$
- $\dim = 0$
- $\dim = 1$

$\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix} \in Z$?

$$3\cdot 3 - 5\cdot 5 + 2\cdot 4 = 0$$

$$9 - 25 + 8 \neq 0$$

$\dim(W \cap Z) = 0$ perché

$$0 = \dim(Z \cap W) < \dim W = 1$$

se fosse Att.,
$\begin{pmatrix}3\\5\\4\end{pmatrix} \in Z \Rightarrow$
$W \subset Z$, ma
poiché $v_0 \in F$

$E \cap F = \emptyset$

$\dim = -1$

$\dim Z + W = 3$ (per la formula della dim)

$Z + W = \mathbb{R}^3$

$E + F = \mathbb{R}^3$

$\dim(E \cap F) = 0 \Leftarrow$ le giaciture sono in somma diretta $\Rightarrow V \oplus W = \mathbb{R}^3 \Rightarrow E \cap F = \{\text{punto}\}$

(b) $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad E = v + W$

$F = \{ 7x - 5y - 2z = 11 \}$ $\qquad F = w + Z$

$w \in Z$?

$7 \cdot 3 - 5 \cdot 5 - 2(-2) =$

$= 21 - 25 + 4 = 0$

$\Rightarrow w \in Z$

$v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \in F$?

$7 \cdot 4 - 5(-1) - 2 \cdot 3 =$

$28 + 5 - 6 \neq 11$

$\Rightarrow v \notin F$

$\Rightarrow \quad F \cap E = \emptyset$

$\dim E = 1$ $\qquad\qquad$ $\dim E + F = 2$

$\dim F = 2$

$\dim E \cap F = -1$