

Alg lin 8/10/14

$V$  spazio rett.  $W \subset V$  sottosp. rett. se

1.  $0 \in W$     2.  $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$     3.  $\lambda \in \mathbb{R}, w \in W \Rightarrow \lambda w \in W.$

Oss: sapendo la 3 si può individuare lo  $\underline{1}$  con  
 $\underline{1}', W \neq \emptyset$

(infatti si prende  $w \in W$  dunque  $0 \cdot w = 0 \in W$ ) -

(In pratica conviene conviene verificare le 1).

$$E_S: \left\{ x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m x_i = \sqrt{2} \right\}$$

Non è un sottosp: non vale la 1:  $0 \notin W$ .

Oss: si posso combinare le 2 e 3:

$$(2+3) w_1, w_2 \in W, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W.$$

Esercizio: verificare  $2 \& 3 \Leftrightarrow$  tale proprietà

(  $\lambda_1 \cdot W_1 + \lambda_2 \cdot W_2$  : sottointeso che il  $\cdot$  si  
esprime prima del  $+$  )

Es:  $W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n (3i^4 - 2i + 5) \cdot x_i = 0 \right\}$

$$6x_1 + 49x_2 + \dots = 0$$

Verifico che  $\tilde{e}$  sottosp:

1.  $0 \in W$  : ok

2+3.  $x, y \in W$  cioè  $\sum (3i^4 - 2i + 5)x_i = \sum (3i^4 - 2i + 5)y_i = 0$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  -

$\lambda x + \mu y \notin W$

$$\sum_{i=1}^n (3i^4 - 2i + 5) (\lambda \cdot x + \mu \cdot y)_i$$

||

$$(\lambda \cdot x_i + \mu \cdot y_i)$$

$$\lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^m (3i^4 - 2i + 5)x_i}_0 + \mu \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^m (3i^4 - 2i + 5)y_i}_0$$

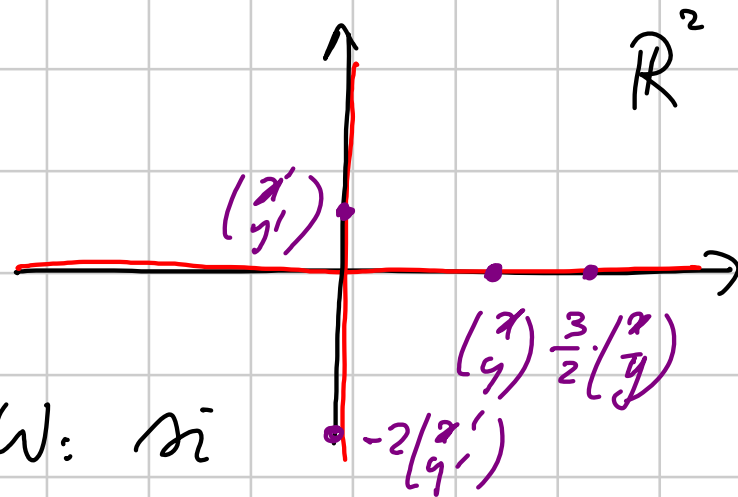
$\Rightarrow 0$

$$E_S: \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x \cdot y = 0 \right\}$$

— Sottospazio?

1.  $0 \in W$  :  $\text{SI}$

3.  $\lambda \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W \Rightarrow \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$ : si



2.  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in W \not\Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \in W$  no padre

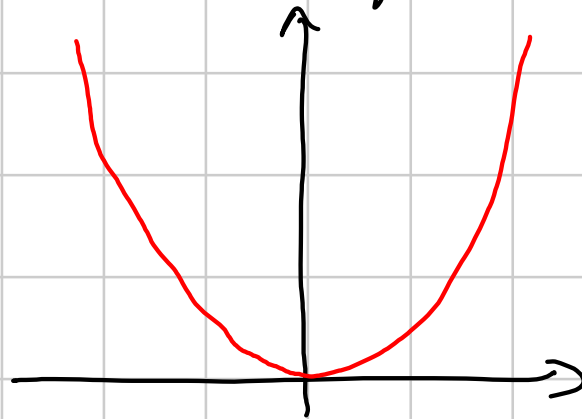
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Non è un sottospazio

$\mathcal{L}_5$ :  $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \right\}$

1.  $0 \in W$  si

3.  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W \not\Rightarrow \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in W$



no perché  $2 \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{A \\ W}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\substack{A \\ \bar{W}}}$

Esempi :

$$\sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad \text{SI}$$

$$\sum_{i=1}^n (\dots) x_i = 0 \quad \text{SI}$$

$$x \cdot y = 0 \quad \text{NO}$$

$$y = x^2 \quad \text{NO}$$

vanno bene  
 solo e  
 soltanto le  
 equazioni  
 polinomiali  
 omogenee di  
 grado  $\frac{1}{n}$   
 nelle componenti

Quasi vero:

$$\underline{E_S}: \{x \in \mathbb{R}^n : e^{3x_1 - 7x_2} = 1\}$$

non polinomiale ma  
equivale a

$$3x_1 - 7x_2 = 0$$

$$\underline{E_S}: \{x \in \mathbb{R}^n : \log(1 + 7x_3^{100}) = 0\}$$

equivale a  $x_3 = 0$

Mondo: vanno bene equaz. polinomiali omogenee  
Il grado 1 è quella ad esse equiv.

$$\underline{E_s}: W = \left\{ A \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : \underbrace{7a_{11} - 5a_{13} + \sqrt{3} \cdot a_{22}} = 0 \right\}$$

Sottosp?

1.  $0 \notin W$

$\Delta_2$

equaz. pol. omog.  
di grado 1 nei  
coeff. di  $A$

2.+3.  $A, B \in W$  cioè  $7a_{11} - 5a_{13} + \sqrt{3} a_{22} = 0$

$$7b_{11} - 5b_{13} + \sqrt{3} b_{22} = 0$$

$$\lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \nexists \lambda A + \mu B \in W$$

Equivalent to

$$\underbrace{7(\lambda A + \mu B)_{11}}_{\lambda a_{11} + \mu b_{11}} - 5 \underbrace{(\lambda A + \mu B)_{13}}_{\lambda a_{13} + \mu b_{13}} + \sqrt{3} \underbrace{(\lambda A + \mu B)_{22}}_{\lambda a_{22} + \mu b_{22}} = 0$$

$$\lambda (7a_{11} - 5a_{13} + \sqrt{3}a_{22}) + \mu (7b_{11} - 5b_{13} + \sqrt{3}b_{22}) = 0$$

$\Rightarrow \underline{OK}$

$$E_S := \{ A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a_{11} \cdot a_{12}^3 + a_{21}^4 \cdot a_{22} = 0 \}$$

non è del tipo "buono"  
 né monocherote

Non è un sottospazio:  
 non vale la 3

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \notin W:$$

$\begin{matrix} A \\ W \end{matrix}$

$$(-1) \cdot (-1)^3 + (-1)^4 \cdot 1 \neq 0$$

$$\text{Es: } W = \left\{ \sum_{m=0}^{+\infty} a_m t^m \in \mathbb{R}[t] : \sum_{m=0}^{+\infty} (1+2m^3) a_m = 0 \right\}$$

eg. buona (= pol. omop.  
di grado 9)  
nei coeff. del polinomio

è un sottospazio:

1.  $0 \in W$  si

2+3.  $p(t) = \sum a_n t^n \in W$ , cioè  $\sum (1+2n^3) a_n = 0$

$q(t) = \sum b_n t^n \in W$ , cioè  $\sum (1+2n^3) b_n = 0$

$$\Rightarrow \lambda \cdot p(t) + \mu \cdot q(t) \in W$$

cioè, se  $\lambda p(t) + \mu q(t) = \sum c_n t^n$   
 è vero che  $\sum (1+2n^3) c_n = 0$ ?

Ora  $c_n = \lambda a_n + \mu b_n$  dunque

$$\begin{aligned} \sum (1+2n^3) c_n &= \sum (1+2n^3) (\lambda a_n + \mu b_n) \\ &= \lambda \sum (1+2n^3) a_n + \mu \sum (1+2n^3) b_n \end{aligned}$$

$$= \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

□

(Oss. tutte le  $\Sigma_i$  sono finite :  
le proprietà solite non valgono sempre  
per  $\Sigma_i$  infinite) ✓

Es:  $\left\{ \sum a_n t^n \in \mathbb{R}[t] : a_0 + 5a_1^2 - 3a_{100}^3 = 0 \right\}$

equaz. nei coeff. del polinomio  
né buona né buona marchetta

Non è un sottospazio:

$$-5+t \in W$$

$$74 \cdot (-5+t) \notin W \text{ perché}$$

$$\begin{aligned} 74 \cdot (-5) + 5 \cdot 74^2 \\ = 5 \cdot 74 \cdot 73 > 0 \end{aligned}$$

Es.  $W = \{ f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : \underbrace{5f(1/4) - 19f(1/\sqrt{2}) = 0} \}$

equaz. buona in  
denominatori di  $f$

$\mathcal{E}^c$  un sottospazio vett:

$$2+3. \quad : \quad f, g \in W \text{ cioè } \begin{aligned} 5f(1/4) - 19f(1/\sqrt{2}) &= 0 \\ 5g(1/4) - 19g(1/\sqrt{2}) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot f + \mu \cdot g \in W$$

$$\text{Equivale a: } \underbrace{5(\lambda f + \mu g)(1/4)}_{\lambda f(1/4) + \mu g(1/4)} - \underbrace{19(\lambda f + \mu g)(1/\sqrt{2})}_{\lambda f(1/\sqrt{2}) + \mu g(1/\sqrt{2})} = 0$$

$$\lambda \cdot \underbrace{(5f(1/4) - 19f(1/2))}_0 + \mu \cdot \underbrace{(5g(1/4) - 19g(1/2))}_0 \Rightarrow 0 \quad \underline{ok}$$

$\mathcal{E}_S$ :  $\{f \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) : f \text{ continua}\}$   
 è un sottospazio -

$\mathcal{E}_S$ :  $\{f \in \mathcal{F}([0,1], \mathbb{R}) : \underline{f(1/2) - 4f(3/7) = 1}\}$

$$f(1/12) - 4f(3/7) - 1 = 0$$

polinomio di grado 1  
in alcuni valori di  $f$   
ma non omogeneo

$\Rightarrow$  non è un sottospazio:  $0 \notin W$

Fisso  $V$  spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  qualsiasi.

Prop: dato  $S \subset V$  esiste uno e un solo  
sottospazio  $W$  di  $V$  che è il più piccolo  
che contiene  $S$ , ovvero;

1.  $W$  è sottosp.

2.  $W \supset S$

3. Dato  $Z$  sottosp con  $Z \supset S$  si ha  $Z \supset W$ .

(Notazione:  $A \supset B$  è vero anche nel caso  $B=A$ ;  
scrivo  $A \supsetneq B$  per escludere  $B=A$ ; alternativa;

$\supseteq$  per simmetria  $B=A$ ,  $\supset$  per esclusione)

(Dimostrare un attimo.)

Def: dati  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ ,  $v_1, \dots, v_k \in V$   
chiamo combinazione lineare di  $v_1, \dots, v_k$   
con coeff.  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  l'espressione

$\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k$   
e anche il suo risultato.

$$(7 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = 11)$$

Es:  $\sqrt{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix} - 4 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{3}1 \end{pmatrix} + 12 \begin{pmatrix} -e \\ 41 \end{pmatrix}$

è la comb. lineare dei vettori  $\begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ \sqrt{3}1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e \\ 41 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$   
con coeff  $\sqrt{3}, -4, 12$ . Vale

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{3} - 28 - 12e \\ \sqrt{3} \pi - 4\sqrt{3}1 + 492 \end{pmatrix}$$

Dimo (Prop): affermo che un  $W^{\text{come}}$  cercato è  
l'insieme di tutte le comb. lin. di elementi di  $S$ ,  
cioè che posto

$$W = \left\{ \lambda_1 s_1 + \dots + \lambda_k s_k : k \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}, \right. \\ \left. s_1, \dots, s_k \in S \right\}$$

esso soddisfa le proprietà 1, 2, 3.

(L'unicità di  $W$  la provo dopo: facile.)

Devo vedere:

1.  $W$  è sottosp.

- $0 \in W$ ; prendo  $A \in S$  qualsiasi ( $S = \emptyset$  poco interessante)

$$0 \cdot A = 0 \in W$$

$\hookrightarrow$  è comb. lin. di el. di  $S$   $\left( \begin{array}{l} k=1 \\ A_1 = A \\ \lambda_1 = \lambda \end{array} \right)$

- Presi  $w, w' \in W$ ,  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$   
verifica che  $\lambda \cdot w + \lambda' \cdot w' \in W$ :

$$\begin{aligned} \text{so che } w &= \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_k A_k & \lambda_i \in S \\ w' &= \lambda'_1 A'_1 + \dots + \lambda'_{k'} A'_{k'} & \lambda'_i \in S \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda \cdot w + \lambda' \cdot w' =$$

$$= (\lambda \cdot \lambda_1) \lambda_1 + \dots + (\lambda \cdot \lambda_k) \lambda_k + (\lambda' \cdot \lambda'_1) \lambda'_1 + \dots + (\lambda' \cdot \lambda'_{k'}) \lambda'_{k'}$$

è comb. lin. di el. di  $S$   
 $\Rightarrow$  OK

$$2. W \supset S$$

Se  $\lambda \in S$  h.

$$\underline{1} \cdot \lambda = \lambda \in W$$

comb. lin. di el. di  $S$   $\begin{matrix} k=1 \\ \lambda_1=1 \\ \lambda'_1=\lambda \end{matrix}$

3. Se  $Z$  è sottosp. e  $Z \supset S$  allora  $Z \supset W$ :

Sia  $w \in W$  qualsiasi; devo provare che  $w \in Z$ ;

$$\text{ho } w = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_k \alpha_k \quad \alpha_i \in S$$

$$\text{Ora } Z \supset S \ni \alpha_i \Rightarrow Z \ni \alpha_i$$

ma  $Z$  è sottospazio dunque

$$\alpha_1, \alpha_2 \in Z \Rightarrow \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 \in Z$$

$$\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 \in Z, \alpha_3 \in Z \Rightarrow (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) + \lambda_3 \alpha_3 \in Z$$

procedendo trova  $w = \lambda_1 \alpha_1 + \dots + \lambda_k \alpha_k \in Z$ .

Unicità: supponiamo di avere  $W_1, W_2$   
che soddisfano 1, 2, 3:

1.  $W_j$  è sottosp
2.  $W_j \supset S$
3. Se  $Z$  è sottosp e  $Z \supset S$  allora  $Z \supset W_j$ .

Usiamo le proprietà 3 di  $W_1$  con  $Z = W_2$

(possiamo perdi' le 1 e le 2 per  $W_2$  dicono  
 $W_2$  è sottosp e  $W_2 \supset S$ ) : Troviamo

$$W_2 \supset W_1$$

Stesso scambiando i ruoli :  $W_1 \supset W_2$

$$\Rightarrow W_1 = W_2$$



Def: Chiamo sottospazio generato da  $S$ ,  
indico con  $\text{Span}(S)$  il sottospazio  
 $W$  della proposizione (cioè il più piccolo

che contiene  $S$ , cioè l'insieme delle comb. lin.  
di el. di  $S$ ) -

Oss:  $\text{Span}(\emptyset) = \{0\}$  (sottospazio banale;  
l'altro è  $V$ )

Oss: Se  $W$  è un sottosp. allora  
 $\text{Span}(W) = W$  -

Qss:  $\text{Span}(\{v_1, \dots, v_m\})$  lo indico con  
 $\text{Span}(v_1, \dots, v_m)$  ed è

$$\left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i : \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R} \right\} -$$

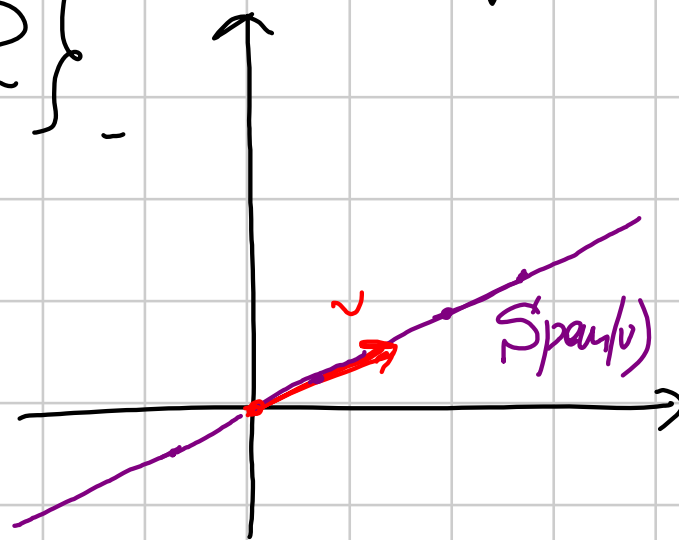
Sappiamo che  $\text{Span}(v_1, \dots, v_m)$  è  
l'insieme di tutte le comb. lin. di  $v_1, \dots, v_m$   
(anche ripetuti) : si riconduce a  $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i$   
raccolgendo i coeff. dei  $v_i$  ripetuti e mettendo

coeff. 0 ai  $r_i$  che non compaiono —

Esempi:  $\forall$  sp. vett.  $v \in V$

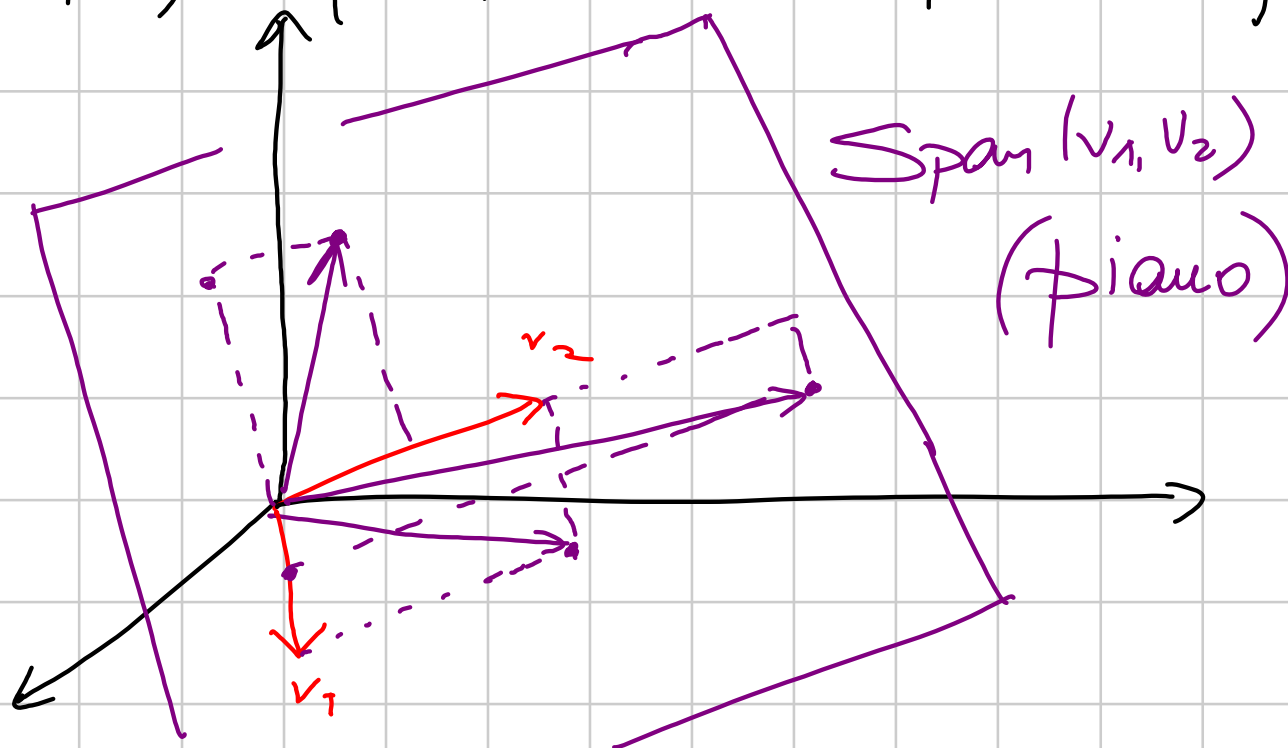
$$\text{Span}(v) = \{ \lambda \cdot v : \lambda \in \mathbb{R} \} \text{ —}$$

$$V = \mathbb{R}^2$$



$$V = \mathbb{R}^3 \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$$

$$\text{Span}(v_1, v_2) = \{ \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 : \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \}$$



Visto:  $\text{Span}(v_1, \dots, v_m) =$  l'insieme delle comb. lin.  
di  $v_1, \dots, v_m$

Q: dato  $v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$  so che esiste  
un'espressione  $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$  ;  
è unica?

Q<sub>0</sub>: so che  $0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$  e ho  
espressione  $0 = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$  ;  
esistono altre espressioni?

Risposte può essere Sì o No, ma è la  
stessa per  $\mathbb{Q}$  e per  $\mathbb{Q}_0$  -