

Esercitazioni Alg. Lin

$$5) \quad \underbrace{9^{n+1} + 2^{6n+1}}_{\text{cioè:}} \quad \bar{x}$$

$$\text{cioè: } 9^{n+1} \quad \text{e} \quad -2^{6n+1}$$

$$9^{n+1} + 2^{6n+1} = 11K$$

$$9^{n+1} = 11h_1 + 2^{6n+1}$$

divisibile per 11

danno lo stesso
resto dividendo per 11
per K intero

$$\begin{aligned} (& 9 = 11 \cdot 0 + 9) \\ (& 81 = 11 \cdot 7 + 4) \end{aligned}$$

$$2^{6n+1} = 11h_2 + 2_2$$

$$2^1 = 11 \cdot 0 + 2$$

$2_1 + 2_2$ is multiple of 11

$$2^7 = 128 = 11 \cdot 11 + 7$$

$$2_1 + 2_2 = K \cdot 11$$

$$2_1 = -2_2 + K \cdot 11$$

$$11h_1 + 2_1 + 11h_2 + 2_2 = 11K$$

$$\cancel{11h_1 + 2_1} = -\cancel{11h_2 + 2_2} + \cancel{11K}$$

1st term -(2nd term)

Per induzione

$$\underline{n=0}$$

$$g^1 + 2^1 = 11$$

è divisibile
per 11 ✓

$$\underline{n \Rightarrow n+1}$$

Suppongo che $g^{n+1} + 2^{6n+1}$ sia divisibile per

$$11$$

$$g^{n+1} = 11 h_1 + r_1$$

$$2^{6n+1} = 11 h_2 + r_2$$

$r_1 + r_2$ è divisibile per 11

$$g^{(n+1)+1} = g^{n+2} = g \cdot g^{n+1} = g \cdot (11h_1 + r_1) =$$

$$2^{6(n+1)+1} = 2^6 \cdot 2^{6n+1} = 64 \cdot (11h_2 + r_2)$$

$$64 \equiv 11 \cdot 5 + 9$$

$$g h_1 \cdot 11 + g \cdot r_1$$

$$5(11h_2 + r_2 + g h_2) \cdot 11 + g \cdot r_2$$

$9r_1 + 3r_2$ è divisibile per 11

$$\Rightarrow 9^{(n+1)+1} + 2^{6(n+1)+1}$$

è divisibile per 11.

6) Principio del minimo : dimostrando
usando induzione completa

$P(k)$ $\left[\begin{array}{l} P(0) \text{ è vero} \\ P(0), P(1), \dots, P(n) \Rightarrow P(n+1) \end{array} \right.$ per ogni

$P(k)$ è sempre vero $\checkmark \forall k \in \mathbb{N}$

$X \subset \mathbb{N}$, $X \neq \emptyset$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{cioe } \exists x \in X \text{ t.c.} \\ x \leq y \quad \forall y \in X \end{array} \right.$
 $\Rightarrow X$ ha un minimo

[es. di insieme senza minimo
 $\{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$]

$$A := \mathbb{N} \setminus X$$

voglio dimostrare che ~~X non ha~~

minimo allora $X = \emptyset$ (cioè $A = \mathbb{N}$)

$$P(k) := k \in A$$

uso il princ. di
induzione completa
con questo enunciato

$$P(0) \quad 0 \in A$$

è vero per $k=0$ se $0 \notin A \Rightarrow 0 \in X$

ma allora 0 sarebbe il min di X .
impossibile perché sappiamo che X non

abbia minimo. $0 \in A$

$$P(0), P(1), \dots, P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

$$0, 1, \dots, n \in A \quad \text{cioè } 0, 1, \dots, n \notin X$$

$$X \subset \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n+1\}$$

voglio dire che $n+1 \in A$ (è $P(n+1)$)

se però fosse falso

ovvero che $n+1 \in X$, quindi $n+1$ deve
essere minimo di X , impossibile perché
suppongo X senza minimo $\Rightarrow P(n+1)$ è vero

Quindi $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$

cioè $n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$

cioè $\mathbb{N} \subset A \Rightarrow X = \emptyset$

Quindi se $X \neq \emptyset \Rightarrow X$ deve avere minimo.

7] Division euclidienne

$$n, m \in \mathbb{Z}$$

$$m > 0$$

$$\Rightarrow q, r \in \mathbb{Z}, \text{ tels que } n = q \cdot m + r$$

$$0 \leq r < m$$

$$X = \{ n - km \mid k \in \mathbb{Z}, \text{ t.c. } n - km \geq 0 \} \subset \mathbb{N}$$

X est non vide. Si $n \geq 0$ par ex. $k=0$
 $n + 0m = n \in X$

Se $n < 0$

$$\underbrace{n - n \cdot m}_{\substack{m \\ X}} \geq 0 \quad \text{con } n = n$$

es $n = -11$

$m = 2$

$$(-11) - (-11) \cdot 2 = 11 > 0$$

perde $m \geq 1$

Per il pr del minimo

~~X ha un minimo~~

Sic $x_0 = \min X$

$$x_0 = n - K_0 m$$

$$0 \leq x_0 < m$$

per di' ?

$$\& \quad X_0 \geq m$$

$$0 \leq X_0 - m = 1 - (K_0 + 1)m < X_0$$

$$\text{e quindi } X_0 - m \in X$$

Cioè potrei trovare un termine in X
più piccolo del massimo X_0 .

$$q := K_0$$

$$\wedge := X_0$$

Voglio mostrare che
se r è un numero intero

$$0 \leq r < m$$

$$n = qm + r$$

$$n = q'm + r'$$

$$0 \leq r' < m$$

Suppongo $r' > r$

$$q'm + r' - qm - r = 0$$

$$(r' - r) = m(q - q')$$

∴

ma $0 \leq r' - r \leq m$ (perché $0 \leq r \leq r' < m$)

quindi è multiplo di m solo

$$\& (q - q') = 0$$

ovvero $r' - r$ è zero

!