

## Alg. Lim. 7/10/14

$V$  sp. vet. se  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$ ,  $\cdot$  :  $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$  t.c.

1.  $v + 0 = v$  2.  $\forall v \exists (-v)$  t.c.  $v + (-v) = 0$

3.  $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$  4.  $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

5.  $\lambda \cdot (v_1 + v_2) = \lambda \cdot v_1 + \lambda \cdot v_2$  6.  $(\lambda_1 + \lambda_2) v = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v$

7.  $\lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot v) = (\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot v$  8.  $1 \cdot v = v$

Conseguenze delle proprietà:  $\bullet v + w = z + w \Rightarrow v = z$

Infatti  $v+w = z+w \Rightarrow (v+w)+(-w) = (z+w)+(-w)$

$\Rightarrow v+(w+(-w)) = z+(w+(-w))$

$\Rightarrow v+0 = z+0 \Rightarrow v = z$

•  $0 \cdot v = 0$  Infatti:

$0 \cdot v = (0+0) \cdot v = 0 \cdot v + 0 \cdot v$

$0 \cdot v + 0$

$\Rightarrow 0 \cdot v = 0$

•  $1 \cdot 0 = 0$  (analoga: per esercizio)

- $\lambda \cdot v = 0$  allora  $\lambda = 0$  oppure  $v = 0$

Infatti, se  $\lambda \neq 0 \exists \lambda^{-1} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow 0 = \lambda^{-1} \cdot 0 = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) = (\lambda^{-1} \cdot \lambda) \cdot v = 1 \cdot v = v$$

- $(-1) \cdot v = -v$ . Infatti:

$$(-1) \cdot v = (-1) \cdot v + 0 = (-1) \cdot v + (v + (-v))$$

$$= (-1) \cdot v + (1 \cdot v + (-v)) = ((-1) \cdot v + 1 \cdot v) + (-v)$$

$$= (-1 + 1) \cdot v + (-v) = 0 \cdot v + (-v) = 0 + (-v) = -v$$

Model: le proprietà algebriche ragionevoli valgono -

Esempio: Visto  $\mathbb{R}^m, M_{m \times m}(\mathbb{R})$  -

- $\mathbb{R}[t]$  con  $p(\cdot) + q(\cdot)$  somma tra polinomi  
 $1 \cdot p(\cdot)$  prodotto numero  $\times$  polinomio  
proprietà 1-8 evidenti:

3.  $(p(t) + (q(t) + r(t))) = (p(t) + q(t)) + r(t)$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

$$\overbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + (b_n + c_n)) \cdot t^n} \quad \overbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} ((a_n + b_n) + c_n) t^n}$$

uguale per l'associatività del  $+$  in  $\mathbb{R}$

- Sia  $S$  un insieme; considero  
 $\mathcal{F}(S, \mathbb{R}) = \{ \text{le funzioni } S \rightarrow \mathbb{R} \}$ .

Definisco su  $\mathcal{F}(S, \mathbb{R})$  una struttura di sp. vett:  
 devo definire, date  $f_1, f_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ , le

$f_1 + f_2 : S \rightarrow \mathbb{R}$ ; e dati  $\lambda \in \mathbb{R}, f : S \rightarrow \mathbb{R}$   
la  $\lambda \cdot f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ; e verificare le proprietà 1-8

nuove operazioni

$f_1 + f_2$  per definirle come funzioni devo conoscere:

- dominio (è  $S$ ) ✓

- codominio (è  $\mathbb{R}$ ) ✓

- legge che a ogni  $s \in S$  associa un el. di  $\mathbb{R}$ :

$$(f_1 + f_2)(s) = f_1(s) + f_2(s)$$

operaz. che sto  
definendo

tra due numeri

Per definire  $\lambda \cdot f$  ho dominio  $(S)$ , codominio  $(\mathbb{R})$   
legge:

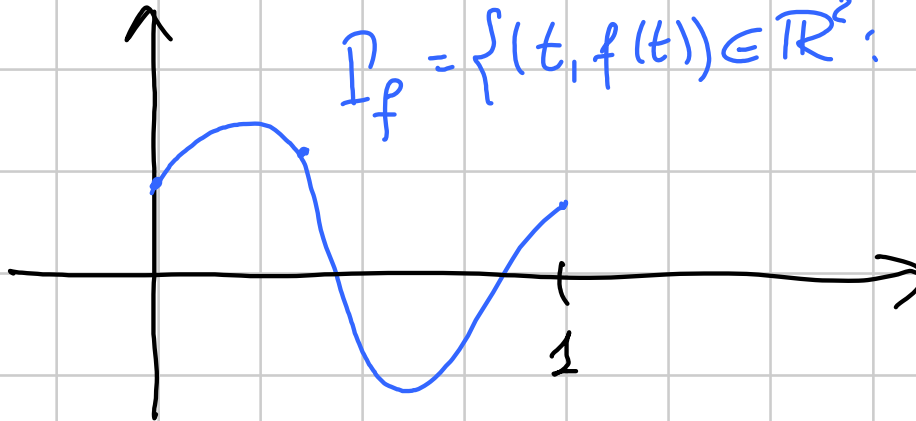
$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

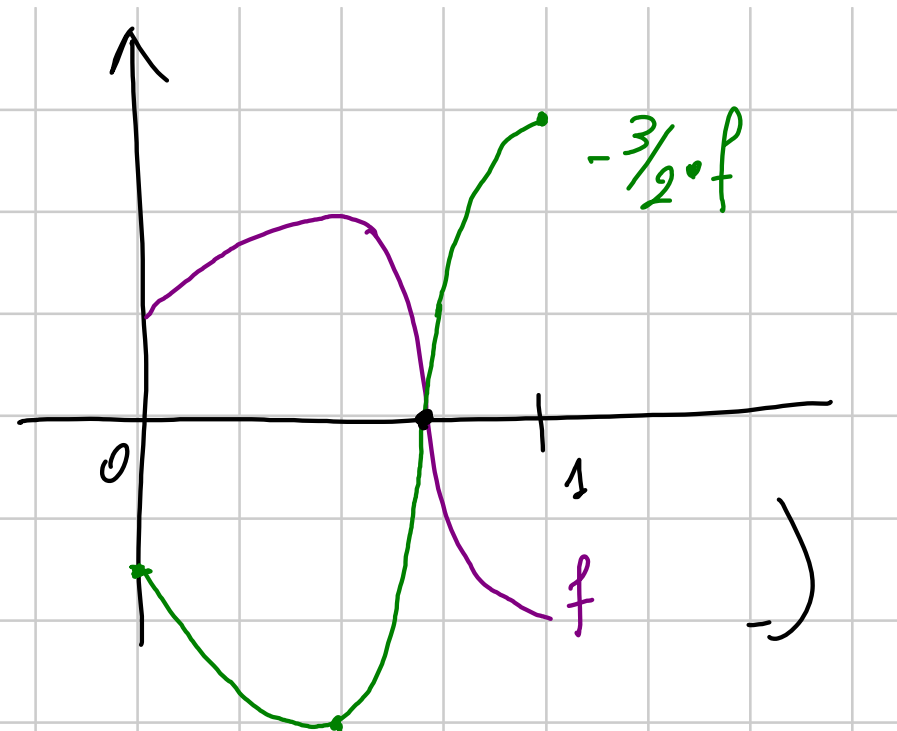
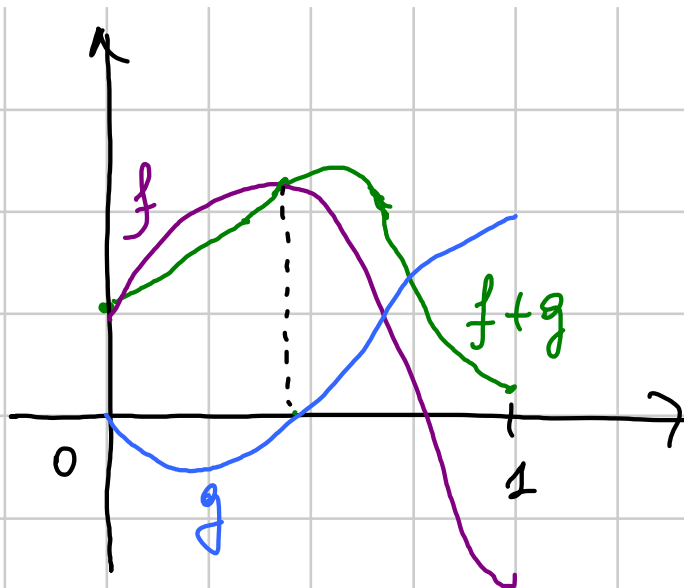
operaz. che sta  
definuendo

tra due numeri

(Interpretazione nel caso  $S = [0, 1]$ :

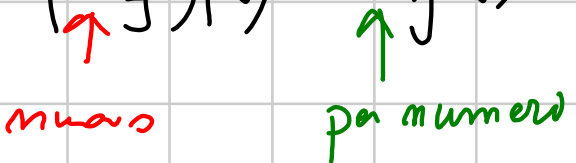
$f \longleftrightarrow$





Verifica delle proprietà 1-8.

1. Definisco 0  $\in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$  tramite: 0(1) = 0  $\forall 1 \in S$   
 nuovo numero

2. Data  $f \in \mathcal{F}(S, \mathbb{R})$  definisco  $(-f)(s) = -f(s)$   


Provo che  $f + (-f) = 0$   


Poiché  $0$  è la funz. che vale sempre  $0$ , devo  
provare che  $(f + (-f))(s) = 0 \quad \forall s \in S$ . Infatti

$$\begin{aligned}(f + (-f))(s) &= f(s) + ((-f)(s)) \\ &= f(s) + (-f(s)) = 0 \quad \checkmark\end{aligned}$$

$$6. (1+\mu) \cdot f \neq 1 \cdot f + \mu \cdot f$$

Entrambi i membri sono funzioni  $S \rightarrow \mathbb{R}$ ;  
verificarlo equivale a vedere che

$$((1+\mu) \cdot f)(s) \neq (1 \cdot f + \mu \cdot f)(s) \quad \forall s \in S$$

// def.

$$(1+\mu) \cdot f(s)$$

// distrib. comm.

$$1 \cdot f(s) + \mu \cdot f(s)$$

// def. +

$$(1 \cdot f)(s) + (\mu \cdot f)(s)$$

// (def.)  $\times 2$

$$1 \cdot f(s) + \mu \cdot f(s)$$



— • —

Situazione generale:  $V$  sp. vett. su  $\mathbb{R}$  —

Def: Si chiama sottospazio vettoriale di  $V$  un sottoinsieme  $W \subset V$  t.c.

1.  $0 \in W$

2.  $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$

3.  $\lambda \in \mathbb{R}, w \in W \Rightarrow \lambda \cdot w \in W$

(in  $W$ )  
"facendo le operaz.  
di spazio vettoriale  
di  $V$ , non si esce  
da  $W$ "

Conseguenza:  $W$  con le operazioni "ereditate" da  $V$   
è uno spazio vettoriale —

Exemp:  $V = \mathbb{R}^n$

•  $W = \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$

1. ✓

2.  $x, y \in W$  cioè  $\sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i = 0$ ,

allora  $\sum_{i=1}^n (x+y)_i = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n y_i$  ✓  
 $= 0 + 0 = 0$

3.  $\lambda \in \mathbb{R}, x \in W$ , cioè  $\sum_{i=1}^n x_i = 0$

allora  $\sum_{i=1}^n (\lambda \cdot x)_i = \sum_{i=1}^n \lambda \cdot x_i = \lambda \cdot \sum_{i=1}^n x_i = \lambda \cdot 0 = 0$ .

$\Rightarrow W$  un sottospazio.

- $W = \mathbb{Z}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in \mathbb{Z}\}$

1.  $0 \in W$  ✓

2.  $x, y \in W \Rightarrow x + y \in W$  ✓

3.  $\lambda \in \mathbb{R}, x \in W \Rightarrow \lambda \cdot x \in W$  No, in fact:

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\mathbb{R}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{Z}^n} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{\cancel{\mathbb{Z}^n}}$$