Alg. Lin. 5/11/14

$g : V \to W$ lineare ; $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ base di V
$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$ base di W

$[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ = la matrice che nella j-esima colonna ha le coord. rispetto a $\mathcal{C}$ dell'immagine rispetto a g del j-esimo el. di $\mathcal{B}$.

Cioè : $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$ se $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$.

Oss: nella dim. del Teo ($\mathcal{M}_{m\times n} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineare biiettiva)

abbiamo visto che $[f_A]^{\mathcal{E}(m)}_{\mathcal{E}(n)} = A$.

Questo suggerisce di scrivere A invece che f_A.

Es: $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$; $f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 + 7x_2 \\ -x_1 + 5x_2 \end{pmatrix}$$

So che $[f_A]^{\mathcal{E}(2)}_{\mathcal{E}(2)} = A$. Invece se

$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$ $\quad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$

$$[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -220/19 & -441/19 \\ 81/19 & 189/19 \end{pmatrix}$$

$$f_A\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 7\\-1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25\\14\end{pmatrix} = \frac{220}{-19}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} + \frac{81}{19}\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$$

$$f_A\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 7\\-1 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}65\\31\end{pmatrix} = \frac{441}{-19}\begin{pmatrix}-4\\1\end{pmatrix} + \frac{189}{19}\begin{pmatrix}-5\\6\end{pmatrix}$$

Segue da quanto già visto (ma ridimostro):

<u>Teo</u>: date basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di W la

$$\mathcal{L}(V, W) \longrightarrow \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$$

$$g \longmapsto [g]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$$

è lineare bijettiva _

($\Rightarrow$ "$\mathcal{L}(V,W)$ è come sp. vett. $M_{m\times n}(\mathbb{R})$
ma in modo <u>non</u> canonico
(dipende dalle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$) _)

<u>Prop</u>: da una base $v_1, \dots, v_n$ di V e dati
vettori $u_1, \dots, u_n$ di W esiste una e
una sola appl. lineare $f: V \to W$ t.c.

$$f(v_i) = u_i \qquad i = 1, \dots, n.$$

Cioè: "una appl. lin. è data dai suoi valori su una base del dominio; tali valori si possono scegliere a piacere".

__Dim (Prop)__: dato $v \in V$ so che esiste unico $x = [v]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n$ ($\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$) t.c. $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$. Se f esiste lineare con $f(v_i) = u_i$ devo avere $f(v) = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

dunque f è unica. Viceversa, posso porre

$f(v) = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$; siccome x è

univocamente associato a v ho definito una

$f : V \to W$. Resta da vedere che è lineare:

se prendo $v, v' \in V$ e $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ ho:

se $[v]_{\mathcal{B}} = x$ e $[v']_{\mathcal{B}} = x'$ so già

$[\lambda v + \lambda' v']_{\mathcal{B}} = \lambda x + \lambda' x'$

$$\Rightarrow f(\lambda v+\lambda' v') = (\lambda x_1+\lambda' x_1')u_1 + \dots + (\lambda x_n+\lambda' x_n')u_n$$
$$= \lambda(x_1u_1+\dots+x_nu_n) + \lambda'(x_1'u_1+\dots+x_n'u_n)$$
$$= \lambda f(v)+\lambda' f(v').$$

$\square$

<u>Es</u>: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ base di $\mathbb{R}^2$

$u_1 = \begin{pmatrix}5\\6\\-3\end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix}-2\\-4\\7\end{pmatrix}$ $\in \mathbb{R}^3$

allora esiste una e una sola $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare t.c. $f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\6\\-3\end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\7\end{pmatrix}$.

Ad esempio,

$$f\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix} = f\left(\frac{3}{5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} - \frac{7}{5}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{3}{5}\begin{pmatrix}5\\6\\-3\end{pmatrix} - \frac{7}{5}\begin{pmatrix}-2\\-4\\7\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}29\\46\\-58\end{pmatrix}$$

<u>Es</u>: $v_1 = \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix}7\\9\\-1\end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix}11\\7\\2\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^3$

non è base di $\mathbb{R}^3$ $(v_3 = v_1 + v_2)$.

Quante sono le $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineari con

$f(v_1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}$, $f(v_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $f(v_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix}$?

<u>Nessuna</u>: $\begin{pmatrix} -1 \\ \pi \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Quante sono le $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineari con

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \underbrace{f(v_3) = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}}_{\text{inutile}}?$$

Sto assegnando f solo su v_1 e v_2; se completo

v_1, v_2 a una base v_1, v_2, v di $\mathbb{R}^3$

per qualsiasi scelta di $u \in \mathbb{R}^2$ esiste una e una sola $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ lineare con

$$f(v_1) = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad f(v_2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad f(v) = u .$$

Morale: ci sono infinite tali f.

Teo:
$$\mathcal{L}(V, W) \longrightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$$
$$g \longmapsto [g]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}$$
lin. bijettiva.

Dimo: lineare: $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A$, $[h]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = B$

$\Rightarrow g(v_j) = \sum_i a_{ij} w_i$, $h(v_j) = \sum_i b_{ij} w_i$

$\Rightarrow (\lambda g + \mu h)(v_j) = \sum_i \underbrace{(\lambda a_{ij} + \mu b_{ij})}_{[\lambda A + \mu B]_{ij}} \cdot w_i$

$\Rightarrow [\lambda g + \mu h]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \lambda A + \mu B$

OK

Esibisco l'inversa: alla matrice $A \in M_{m \times n}$ associo l'unica $g: V \to W$ lineare (Prop) t.c. $g(v_j) = \underbrace{\sum a_{ij} w_i}_{u_j}$.

$\blacksquare$

__Prop:__ $f: V \to W$ lin. $\mathcal{B}$ base di V, $\mathcal{C}$ base di W

$$\Longrightarrow [f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}.$$

Cioè: "la matrice di f agisce sulle coordinate come f agisce sui vettori."

Dimo. $[v]_{\mathcal{B}} = x$ significa $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n = \sum_{j=1}^{n} x_j v_j$

$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A$ significa $f(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$ _ Allora

$$f(v) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(v_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right)}_{(A \cdot x)_i} \cdot w_i \implies [f(v)]_{\mathcal{C}} = A \cdot x. \quad \blacksquare$$

Q : Come cambiano $[v]_{\mathcal{B}}$ e $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$
se cambio $\mathcal{B}$ o $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$?

Richiamo : $f : X \to Y$ è invertibile se esiste
$g : Y \to X$ t.c. $g \circ f = id_X$ e $f \circ g = id_Y$.
In tal caso diciamo g la inversa di f
e la indico con f^{-1}. (Facile: è unica se esiste.)

Fatto: f invertibile $\iff$ f è bigettiva.

<u>Oss</u>: se ho $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ allora:

- Se $g \circ f$ è surgettiva allora g è surgettiva
  $\left(z = (g \circ f)(x) \Longrightarrow z = g(f(x)) \right)$

- Se $g \circ f$ è iniettiva allora f è iniettiva
  (se non lo fosse $f(x_1) = f(x_2)$ con $x_1 \neq x_2$
  ne allora $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ con $x_1 \neq x_2$)

<u>Oss</u>: se ho $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$

e $g \circ f = id_X$ allore g è surj. e f è iniett.

Att: Sapendo che $g \circ f = id_X$ non si conclude
che f è invertibile e $g = f^{-1}$:

Es: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = n+1$

$g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $g(n) = \begin{cases} 197 & \text{se } n = 0 \\ n-1 & \text{se } n > 0 \end{cases}$

$(g \circ f)(n) = n$ ma f non è surj. ($0 \notin \operatorname{Im} f$)
e g non è iniettive ($g(0) = g(198)$).

"Mezza invertibilità $\not\Longrightarrow$ l'altra mezza"

Invece, già visto:

- $f: V \to W$ lineare può essere invertibile solo se $\dim V = \dim W$

- se $\dim(V) = \dim(W)$ e $f: V \to W$ è lineare mezza invertibilità $\Longrightarrow$ l'altra mezza; in particolare se $g: W \to V$ è lin. e

$g \circ f = id_V$ allora f è invertibile e $g = f^{-1}$

Chiamo simmetrica una matrice A quadrata t.c. ${}^tA = A$:

$$\begin{pmatrix} 7 & \pi & -3 & 0 \\ \pi & e & 2 & 147 \\ -3 & 2 & 1 & 22 \\ 0 & 147 & 22 & -13 \end{pmatrix}$$

Pongo:

$$S_n = \{ A \in M_{n \times n} : {}^tA = A \}$$

Chiamo antisimmetrica una A quadrata t.c.
${}^tA = -A$;

$$\begin{pmatrix} 0 & -7 & -9 & & \\ 7 & 0 & \pi & & \\ 9 & -\pi & 0 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_n = \{ A \in M_{n \times n} : {}^tA = -A \}.$$

<u>Esercizio</u>: Provare che $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n$ sono sttsp. di $M_{n \times n}$, calcolarne le dim e provare che

$M_{n\times n} = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$ _ Trovare le proiez. associate_

<u>Stsp</u>: la trasposizione è lineare $\Rightarrow$ lo sono

$$A \longmapsto A - {}^tA \qquad \mathcal{S}_n = \mathrm{Ker}(\text{lei})$$

$$A \longmapsto A + {}^tA \qquad \mathcal{A}_n = \mathrm{Ker}(\text{lei})$$ _

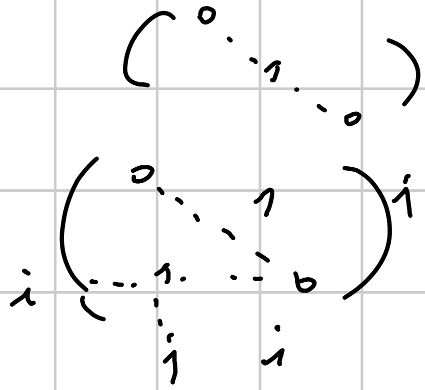
<u>Dim</u> (il numero di parametri liberi che servono e bastano a determinare un punto dello spazio):

$$\mathcal{S}_n : \quad \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} * & * & * & \cdots & * \\ \cdot & * & * & \cdots & * \\ \cdot & \cdot & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & * \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n \\ n-1 \\ \vdots \\ \\ 1 \end{array} \end{array}$$

$$\Rightarrow \dim = 1+2+\cdots+n-1+n$$
$$= n(n+1)/2$$

base : E_{jj} $\quad j=1\dots n$

$E_{ij}+E_{ji}$ $\quad 1\le i<j\le n$



$n=3$ base di $\mathcal{S}_3$:

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}_n : \quad \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & * & * & * & \cdots & * \\ \cdot & 0 & * & * & \cdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & 0 & * & \cdots & \vdots \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & * \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} n-1 \\ n-2 \\ \vdots \\ \\ 1 \\ 0 \end{array}$$

$$\dim = 0 + 1 + \dots + n-1 = n(n-1)/2$$

Devo vedere che $M_{n\times n} = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$; basta vedere

-) $\mathcal{S}_n \cap \mathcal{A}_n = \{0\}$ ✓

-) $\dim \mathcal{S}_n + \dim \mathcal{A}_n = \dim M_{n\times n}$

$$\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} \overset{?}{=} n^2$$ ✓

Data $A \in \mathcal{M}_{n \times n}$ devo scrivere

$$A = P + Q \quad \text{con } P \in \mathcal{S}_n,\ Q \in \mathcal{A}_n$$

e allora avrò $p(A) = P$ e $q(A) = Q$.

$$A = P + Q$$

$$\Rightarrow \quad {}^tA = P - Q$$

sommando: $P = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$

sottraendo: $Q = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$

Dunque $p(A) = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$ $\quad q(A) = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$.

Foglio 2/11/14.

(1b) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ x_2 + 11x_3 \end{pmatrix}$

f è lineare perché $f = f_A$, con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.

$$\mathrm{Ker} f = \left\{ x : \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 + 11x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x : \begin{array}{l} x_2 = -11 x_3 \\ x_1 - 6x_3 = 0 \end{array} \right\} = \left\{ x : \begin{array}{l} x_2 = -11 x_3 \\ x_1 = 6x_3 \end{array} \right\}$$

$$= \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \dim \operatorname{Ker} f = 1$$

<u>Oss</u>: Se $f : V \to W$ è lineare e $v_1, \dots, v_m$ sono generatori di V (OK se sono base) allora $f(v_1), \dots, f(v_m)$ sono generatori di $\operatorname{Im}(f)$:

$w \in \operatorname{Im} f \Longrightarrow w = f(v)$ ma $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

$$\Longrightarrow w = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_m f(v_m)$$

Per noi: applico $f = f_A$ a $\mathcal{E}^{(n)}$ e trovo le colonne di A _

(Fatto generale: le colonne di A generano $\mathrm{Im}(f_A)$ _)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \cancel{\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}}$$

$\checkmark$ $\checkmark$

generano $\mathrm{Im}(f)$: estraggo base per trovare dim.

è $-6 \cdot \mathrm{I} + 11 \cdot \mathrm{II}$

$$\underset{3}{\dim(\mathbb{R}^3)} = \underset{1}{\dim \operatorname{Ker} f} + \underset{2}{\dim \operatorname{Im} f}$$

(11) $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot x$

$$\text{Ker} f: \begin{cases} x_4 = -x_1 + 2x_2 \\ x_3 = -x_2 + x_4 = -x_1 + x_2 \\ x_1 - 3x_1 + 3x_2 - 2x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x_1 = 7x_2 \\ x_4 = -x_1 + 2x_2 \\ x_3 = -x_1 + x_2 \end{cases}$$

$$\text{Ker} f = \text{Span}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \dim = 1$$

Dalle formula della dim: $\quad \dim \text{Im} f = 4 - 1 = 3$

Infatti:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix} \quad \cancel{\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}}$$

<u>OK</u>