

Esercizio 3

(a) per $v_1, v_2, \dots, v_4$ vale $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$$\text{es.: } v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -10 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow v_1, \dots, v_4$ sono contenuti nel sottospazio di

$$\dim 2 : W = \{ x \in \mathbb{R}^3 : \sum x_i = 0 \}$$

v_1, v_3 sono indipendenti

$v_6 \notin W$ e quindi è indipendente da v_1, v_3

$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_6\}$ è base

(evidentemente anche $\{v_1, v_3, v_5\}$)

(b) $\dim V = 3$

$x_4 = x_1 + x_2 - x_3$ cerca 3 vettori indip
guardando le prime 3 coordinate

$$v_1 \in V$$

v_2 è indipendente da v_1 e $v_2 \in V$

v_3 è indipendente da v_1 e v_2 ?

$$v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$$

$\rightarrow$

$$\lambda_1 \cdot 3 = -2 \lambda_2$$

$$\lambda_1 = 2 \lambda$$

$$\lambda_2 = -3 \lambda$$

condizione affinché la prima coordinata si annulli

$$v_3 = \lambda (2 v_1 - 3 v_2)$$

$$= \lambda \left(\begin{pmatrix} 6 \\ -14 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 19 \\ 27 \\ -9 \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -32 \\ -25 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \lambda = -1$$

$\Rightarrow v_3$ è **dependente** da v_1 e v_2

Proviamo $v_4 \in V$ e si verifica che

$$v_4 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \quad \text{non ha soluzioni}$$

$$\Rightarrow \{v_1, v_2, v_4\}$$

è base perché v_4 è
indip. da v_1, v_2 e $\dim V = 2$

Esercizio 4

(a) $\dim W = 2$ prendi i due vettori dati sono
indip
 $\dim Z = 2$ per lo stesso motivo

$$W \cap Z$$

$$W = \langle v_1, v_2 \rangle$$

$$Z = \langle w_1, w_2 \rangle$$

$$a v_1 + b v_2 = c w_1 + d w_2$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -a + 2b & = & 3c - 3d \\ 4a + b & = & 2c + 3d \\ 2a - b & = & c \\ a + 3b & = & -c + 8d \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} c & = & 2a - b \\ -a + 2b & = & 6a - 3b - 3d \\ \cancel{4a} + b & = & \cancel{4a} - 2b + 3d \\ a + 3b & = & -2a + b + 2d \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c = 2a - b \\ -7a + 5b + 3d = 0 \\ 3b = 3d \\ 3a + 2b - 8d = 0 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} c = 2a - b \\ -7a + 14b = 0 \\ b = d \\ 3a - 6b = 0 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c = 2a - b \\ a = 2b \\ b = d \\ a = 2b \end{array} \right.$$

$$\dim W_{n2} = 2$$

$$b = 1$$

$$a = 2, b = 1, c = 3, d = 1$$

$$2v_1 + v_2 = 3w_1 + w_2$$

$$v_2 = -2v_1 + 3w_1 + w_2$$

$$\dim(W + Z) = 3$$

perché v_2 dipende da
 v_1, w_1, w_2

e inoltre v_1 è indipendente da w_1, w_2

(il sistema precedente non ha soluzioni con $a = 1, b = 0$)

verifico Grassmann

$$\underbrace{\dim W}_2 + \underbrace{\dim Z}_2 = \underbrace{\dim(W \cap Z)}_1 + \underbrace{\dim(W + Z)}_3$$

(b) dim $W = 3$ facciamo vedere che il terzo
 vettore non dipende dai primi due
 dim $Z = 2$:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_3 + 6x_4 = 2 \\ -5x_2 + 13x_3 - 13x_4 = 0 \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} x_3 = 1, x_4 = 0 \\ x_1 = 1/5, x_2 = 13/5 \\ \hline x_3 = 0, x_4 = 1 \\ x_1 = -6/5, x_2 = -13/5 \end{array} \right.$$

$$x_1 = \frac{1}{5} (x_3 - 6x_4)$$

$$x_2 = \frac{13}{5} (x_3 - x_4)$$

$$\Rightarrow \dim W = 2$$

$$\dim W \cap Z = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$W = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

$$v = a v_1 + b v_2 + c v_3 \in Z \quad ?$$

verifico se le eq. di Z sono soddisfatte

$$x_1 = a + 3b + 7c$$

$$x_2 = 2a - 4b + 2c$$

$$x_3 = -a + 5b - c$$

$$x_4 = 3a + 6 - c$$

$$\begin{cases} 2(a + 3b + 7c) + (2a - 4b + 2c) - 3(-a + 5b - c) + \\ + 5(3a + b - c) = 0 \\ 3(\quad) - (\quad) + 2(\quad) + \\ + (\quad) = 0 \end{cases}$$

risolviamo in a, b, c e calcoliamo $\dim W \cap \mathbb{Z}$

$\dim W \cap \mathbb{Z}$

senza base di $\mathbb{Z}$

$w_1 \in W$?

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 13/5 \\ 1/5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6/5 \\ -13/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_1 \notin W \Rightarrow \dim Z + W = 4$$

Se $w_1 \in W$, prova em w_2

$$\text{se } w_2 \notin W \Rightarrow \dim Z + W = 4$$

$$\text{se } w_2 \in W \Rightarrow \dim Z + W = 3$$

$$(2) \quad Z = \{ p(t) \in V : p(-1) = p''\left(\frac{1}{6}\right) = 0 \}$$

$$p(t) = a + bt + ct^2 + dt^3 + et^4$$

$$p(-1) = 0 \Leftrightarrow a - b + c - d + e = 0$$

$$p''\left(\frac{1}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2c + \frac{6d}{6} + 12e\left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$$

Fogli. 2/4/2014

Es. 1

$$(a) \quad f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker } f = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases} \right\}$$

Per f : prendo base di $\mathbb{R}^3$ e_1, e_2, e_3

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad f(e_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ generano $\text{Im } f$, ma $f(z_1), f(z_2)$ sono indipendenti, in $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ l'immagine è tutto $\mathbb{R}^2$.

$\dim \text{Im } f = 2$ $\text{Im } f = \mathbb{R}^2$ verifico formula dim:

$$\dim \ker f = 2$$

$$\dim R^3 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$$

lo verifica perché $Ker f$
è dato da due relazioni
lineari indipendenti