

Foglio ③ Es 2

$$(b) \quad V = \mathbb{R}^4$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Sono indipendenti?

Almeno v_1 e v_2 sono indipendenti

(lo vedo dalle prime due coordinate) ~

Verifico se v_1, v_2, v_3 sono indep. cioè
 se $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$ ha sol. non banali
 ($\neq 0$) ~

$$v_1, \quad \underline{v_2 + 2v_1}, \quad \underline{v_3 - 4v_1}$$

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ -3 \\ -13 \end{pmatrix}$$

sono indep. Se
 lo sono v_1, v_2, v_3

cioè $v_2 + 2v_1 + v_3 - 4v_1 = 0$

ovvero

$$-2v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

sono DIPENDENTI

devo completare a base $\{v_1, v_2\}$

$$u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 u_1 + \lambda_4 u_2 = 0$$

Dalle prime 2 coord $\lambda_1, \lambda_2 = 0$

(perché rispetto alle prime 2 coord. v_1, v_2
sono indep.)

$$\lambda_3 w_1 + \lambda_4 w_2 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

$$(c) \quad V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0 \right\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$v_1 \in V ?$$

OK (faccio il calcolo)

$$\dim V = ?$$

$$f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4$$

$$V = \text{Ker } f$$

per la formula della dim $\dim V = 3 = (4 - 1)$

$$\text{Se } v \in V \quad v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$x_4 = \frac{1}{2} (4x_1 + 3x_2 + 5x_3)$$

La 4^a coordinata è linearmente determinata dalle
prime 3.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono base di $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 5/2 \end{pmatrix}$$

$v_1 \quad \quad \quad v_2 \quad \quad \quad v_3$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ sono base di V .

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

è prop. a v_3 e deve
combinare bene

Sono indipendenti

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad (\text{dalla 1}^{\text{a}} \text{ coord.})$$

$$\lambda_2 = 0 \quad (\text{dalla 2}^{\text{a}} \text{ coord.})$$

$$\lambda_3 = 0 \quad (\text{dalla 3}^{\text{a}} \text{ coord.})$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

et vect. v_1, v_2, v_3
 on a une base -

$$(d) \quad V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \right\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\dim V = 3$$

v_1 et v_2 sont indip. et on a une base -

(1)

$$\dim V = 2$$

$$J: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$J(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 \end{pmatrix}$$

$$\dim \operatorname{Im} J = 2$$

$$J(e_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$J(e_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

devo completare $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ a base

cioè cerco $v_2 \in V$, indip. da v_1 .

Cerco
nella
forma: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix}$ me, non sarà un vettore di V

$$\left. \begin{array}{l} 1 + a - b = 0 \\ 2 - a + b = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 3 = 0 \\ 0 \end{array} \right\}$$

Cerco $v_2 \in V$ nella forma

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + b + 1 = 0 \\ 2a + 5b - 1 = 0 \end{cases}$$

ho due eq.

$\Rightarrow$ trovo $a, b \rightarrow$ trovo v_2

$\{v_1, v_2\}$ è base di V

(4) $V = \mathbb{R}[t]$ ha dim infinita!

$$V = V_1 \oplus V_2$$

$$V_1 = \{\text{polin di grado } \leq 2\}$$

$$V_2 = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] \quad , \quad \text{con } a_0 = a_1 = \dots = a_7 = 0 \}$$

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$$

$$v_1, v_2, v_3 \in V_1$$

$$\textcircled{x} \quad 1, t, t^2, v_3, v_1, t^5, t^6, v_2$$

Scrivendo i valori dei coefficienti è evidente
che queste è base

$$\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \dots + \lambda_7 w_7 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{tutti } \lambda_i = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \begin{pmatrix} s \\ - \\ - \\ - \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$1 \qquad t \qquad t^2 \qquad v_2 \qquad \dots$

$\dim V$ è infinita

La base di V è data da $\bigoplus$ e
 la base di V_2

base $\{v_i\} = \{t^i, i \geq 0\}$ —