

Alg. Lin. 4/11/14

$f: V \rightarrow W$ lineare se $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)$ -

Esempio ("prob lips"): Se $A \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ lo
 $f_A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto A \cdot x$ è lineare.

Oss: da str. di sp. vett. di $\mathcal{L}(S, \mathbb{R})$

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

si usano le
operazioni

+ , prod. per scal
qui

Dunque anche $\mathcal{L}(S, W)$ con W sp. vett. ha
una str. di sp. vett.;

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad , \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$$

Def: $L(V, W) = \{f \in \mathcal{F}(V, W) : f \text{ lineari}\}$
"l'insieme di tutte le appl. lin. da V in W "
(dove V, W sono spazi vettoriali) -

Prop: $L(V, W)$ è un sp. vett. di $\mathcal{F}(V, W)$ -
("Una comb. lin. di appl. lineari è ancora lineare")

Dim: siano f_1, f_2 lineari - Provo che
 $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ lo è:

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \neq \alpha_1 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v_1) + \alpha_2 (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(v_2)$$

"

"

$$\begin{aligned} & \lambda_1 f_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) + \lambda_2 f_2(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) \\ &= \lambda_1 \alpha_1 f_1(v_1) + \lambda_1 \alpha_2 f_1(v_2) + \lambda_2 \alpha_1 f_2(v_1) + \lambda_2 \alpha_2 f_2(v_2) \\ &= \alpha_1 (\lambda_1 f_1(v_1) + \lambda_2 f_2(v_1)) + \alpha_2 (\lambda_1 f_1(v_2) + \lambda_2 f_2(v_2)) \end{aligned}$$

□

Q: "Cos'è $L(V, W)$?" A: "le matrici"

Per V, W spazi di vettori colonne cioè è strettamente vero:

Teo: l'applicazione $M_{m \times m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$
 $A \mapsto f_A$

è lineare e biettiva. (Dunque $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ è uguale come sp. vett. a $M_{m \times m}(\mathbb{R})$ — e in modo canonico, cioè senza bisogno di fare scelte) —

Dimo: linearità: $f_{(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2)} = \lambda_1 f_{A_1} + \lambda_2 f_{A_2}$

operaz. tra matrici operaz. tra funzioni
uguali tra loro funz. $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$

Devo vedere che

$$f_{(A, A_1 + \lambda_2 A_2)}(x) = (\lambda_1 f_{A_1} + \lambda_2 f_{A_2})(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2) \cdot x$$

$$\lambda_1 f_{A_1}(x) + \lambda_2 f_{A_2}(x)$$

$$\lambda_1 A_1 \cdot x + \lambda_2 A_2 \cdot x$$

$$\lambda_1 A_1 \cdot x + \lambda_2 A_2 \cdot x = \underline{OK}$$

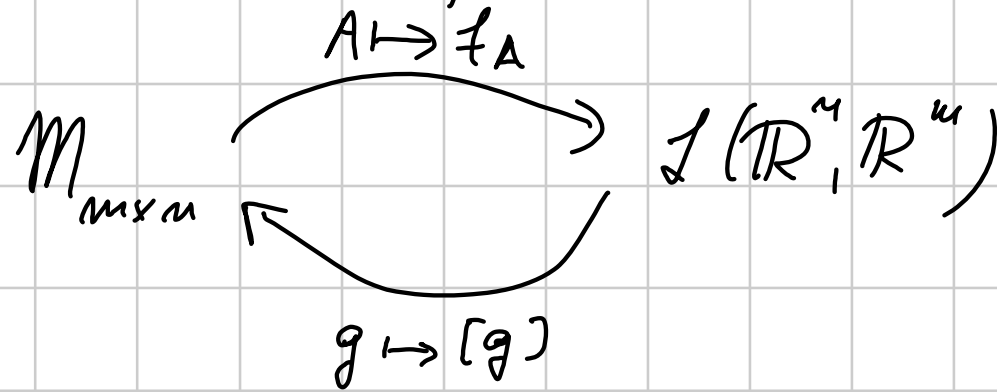
Esibisco l'inversa, cioè data $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

esibisco una matrice $[g] \in M_{m \times n}$ t.c.

$$f_{[g]} = g$$

$$[f_A] = A$$

(cio' dice che le due funzioni



$$\left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right) - (e_1, \dots, e_n) \in \mathcal{E}^{(n)}$$

Data $g \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ considero $g(e_i^{(n)})$ $i=1, \dots, n$
 e lo esprimo in coordinate rispetto a $\mathcal{E}^{(m)}$:

$$g(e_i^{(n)}) = \sum_{j=1}^m a_{ji} e_j^{(m)}$$

Ho trovato $(a_{ji})_{\substack{j=1 \dots m \\ i=1 \dots m}} \in M_{m \times m}$

e lo chiamo $[g]_{-}$ Faccio le due
verif che:

- $f[g] = g$ cioè $f[g](x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^m$
scrivo $x = \sum_{i=1}^m x_i e_i$; allora ho

$$(f[g](x))_i = (g(x))_i$$

$$\left([g] \cdot x \right)_j$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i$$

$$\left(g \left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) \right)_j$$

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i g(e_i) \right)_j = \left(\sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j \right)_j$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ji} \cdot x_i \quad \underline{\underline{=}}$$

• $[f_A] = A$ infatti se $A = (a_{ji})$

ho $f(e_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} e_j$

(infatti: :

$$\left(\begin{array}{c} \boxed{} \\ \uparrow \\ i \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e_i \end{array} \right) \leftarrow l$$

conta solo la colonna i -esima

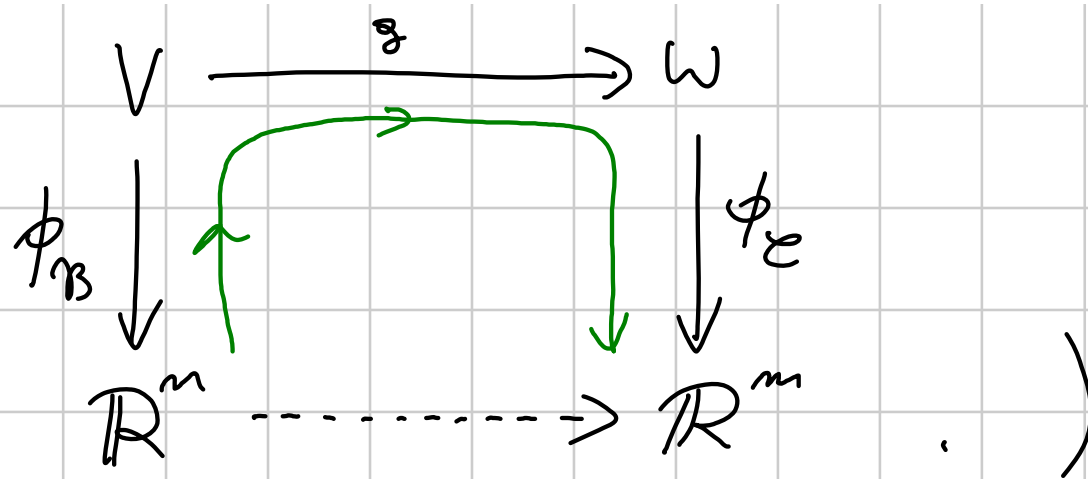
$$\Rightarrow [1_A] = A.$$



Corollario: se $\dim V = n$ e $\dim W = m$
 allora scelte una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ e una
 base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^m$ l'applicazione

$$\mathcal{L}(V, W) \xrightarrow{g \mapsto \phi_{\mathcal{C}} \circ g \circ \phi_{\mathcal{B}}^{-1}} \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

(ricordiamo: $\phi_{\mathcal{B}} : V \xrightarrow{[\cdot]_{\mathcal{B}}} \mathbb{R}^n$
 $\phi_{\mathcal{C}} : W \xrightarrow{[\cdot]_{\mathcal{C}}} \mathbb{R}^m$)



T è lineare bigettiva. In particolare esiste
 una applicazione lineare bigettiva tra $\mathcal{L}(V, W)$
 e $M_{m \times n}(\mathbb{R})$. MA: essa non è canonica,
 perché dipende dalle scelte di B e C .

Def: se $\mathcal{B}$ è una base di V , $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$
 $\mathcal{C}$ è una base di W $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_m)$

$g: V \rightarrow W$ è lineare

chiamo matrice associate a g risp. $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$
in partenza e $\mathcal{C}$ in arrivo la matrice

$[g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ data da $(a_{ji})_{\substack{j=1 \dots m \\ i=1 \dots n}} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

$$\text{t.c. } g(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j -$$

Cioè: nelle colonne i -esime di $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$
si trovano le coordinate dello
 i -esimo elemento di $\mathcal{B}$ (base in partenza)
rispetto a $\mathcal{C}$ (base in arrivo) -

Es: Sia $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$$g: X \rightarrow X \quad \text{data da} \quad g(x) = \begin{pmatrix} -5x_1 + 9x_2 + x_3 \\ 2x_1 - 6x_2 - 7x_3 \\ x_1 - 5x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}.$$

(g è la restrizione a X dell'applicazione $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ associata alla matrice:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 1 \\ 2 & -6 & -7 \\ 1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

ma per vedere che $\bar{\tau}$ definite come applicazione $X \rightarrow X$ devo verificare che se $x \in X$ allora $A \cdot x \in X$:

infatti se $x \in X$, cioè $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ e

$$A \cdot x = y \quad \text{h.o.} \quad y_1 + y_2 + y_3 = -5x_1 + 9x_2 + x_3 + 2x_1 - 6x_2 - 7x_3$$

$$\begin{aligned}
 &+x_1 - 5x_2 + 4x_3 \\
 &= -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 \\
 &= -2(x_1 + x_2 + x_3) = -2 \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Consideriamo $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} \right)$

$$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

Cerco $[8]_{\mathcal{B}}$: sarà 2×2 .

I colonna: esprime $g\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \dots = \square \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \square \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

II colonna: esprime $g\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix} = \dots = \square \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \square \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

Calcoli

$$g\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -7 \\ . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 44 \\ 121 \\ -165 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 44 \\ 121 \\ -165 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{44 + 4 \cdot 121}{2 + 4 \cdot (-5)} = \sqrt{3}$$

$$\beta = \frac{5 \cdot 44 + 2 \cdot 121}{5 \cdot 4 + 2 \cdot (-1)} = \sqrt{2}$$

$$[q]_3^c = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & * \\ \sqrt{2} & * \end{pmatrix}$$

($\sqrt{3}, \sqrt{2}$: da sostituire
con numeri interi) -