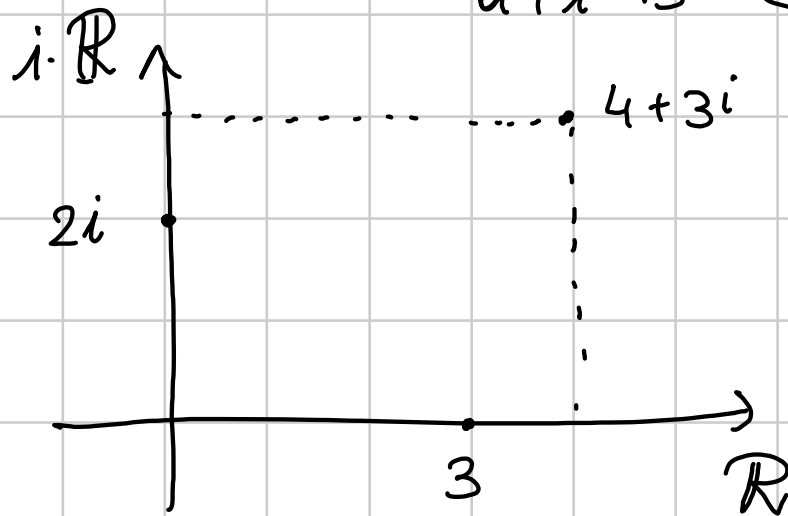
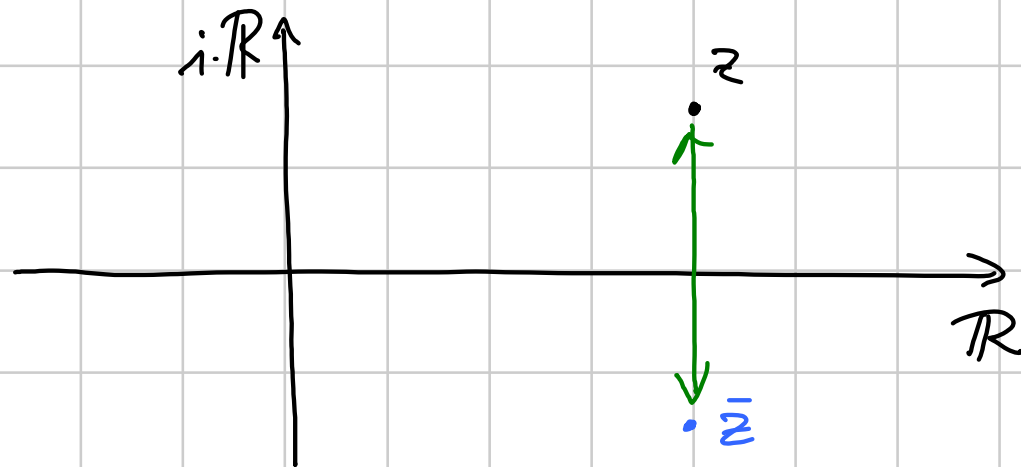


Alg. Lin. 3/12/14

$$\mathbb{C} = \{a + i \cdot b : a, b \in \mathbb{R}\} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$a + i \cdot b \leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$



Def: se $z = a + i \cdot b \in \mathbb{C}$ chiamo coniugato di z
il numero $\bar{z} = a - i \cdot b$.



Oss: $z \mapsto \bar{z}$ è
la riflessione
rispetto a $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

$$\underline{\text{Oss}}: \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

$$\underline{\text{Oss}}: \overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}; \quad \overline{\bar{z}} = z$$

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$$

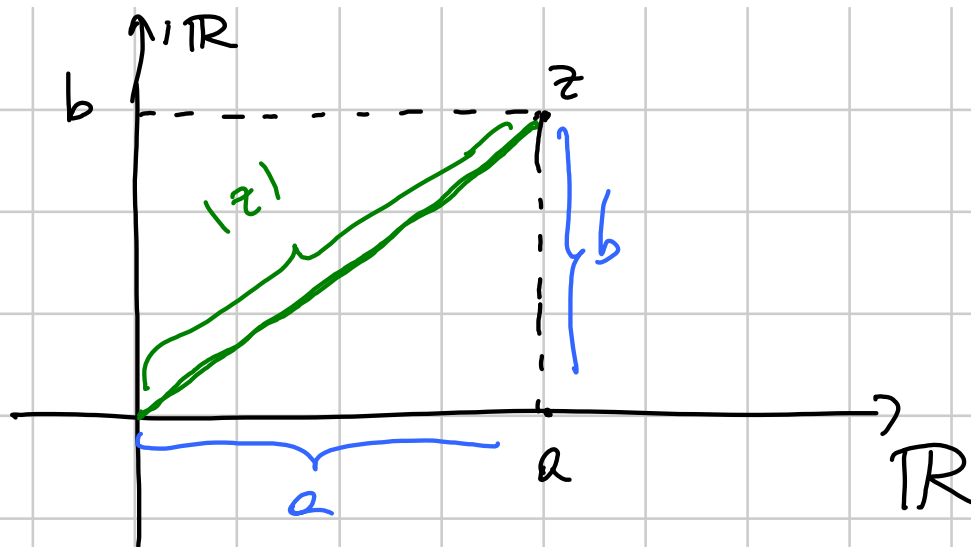
$$\overline{(a+ib) \cdot (c+id)} \neq \overline{(a+ib)} \cdot \overline{(c+id)}$$

$$(a \cdot c - b \cdot d) - i(a \cdot d + b \cdot c) \quad (a-ib) \cdot (c-id)$$

$$(a \cdot c - (-b) \cdot (-d)) + i(a \cdot (-d) + (-b) \cdot c) \quad \checkmark$$

Def: Se $z = a+ib$ chiamiamo modulo di z

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{la radice } \geq 0)$$



$$\underline{Oss}: |\bar{z}| = |z|$$

$$\begin{aligned} \underline{Oss}: z \cdot \bar{z} &= (a+ib) \cdot (a-ib) \\ &= a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

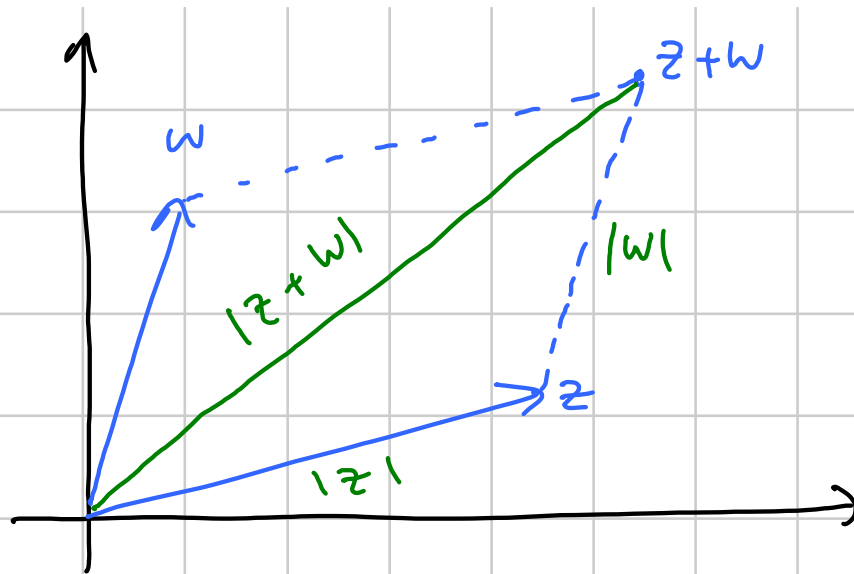
$$\Rightarrow |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} ; \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \quad \text{for } z \neq 0$$

$$\left(\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \right)$$

$$\begin{aligned} \underline{QSS}: |z \cdot w| &= \sqrt{(z \cdot w) \cdot \overline{(z \cdot w)}} \\ &= \sqrt{z \cdot w \cdot \bar{z} \cdot \bar{w}} = \sqrt{z \cdot \bar{z} \cdot w \cdot \bar{w}} \\ &= \sqrt{|z|^2 \cdot |w|^2} = |z| \cdot |w|. \end{aligned}$$

$$\underline{Prop}: |z+w| \leq |z| + |w| \quad \begin{array}{l} \text{disuguaglianza} \\ \text{triangolare} \end{array}$$

$$\text{e vale se e solo se } w = \lambda \cdot z, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0.$$



Obs: $|x(z)| \leq |z|$, $|y(z)| \leq |z|$
 $|z| \leq |x(z)| + |y(z)|$

Dim (Prop): $|z+w|^2 = (z+w) \cdot \overline{(z+w)}$

$$= (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) = \underbrace{z \cdot \bar{z}}_{|z|^2} + z \cdot \bar{w} + \underbrace{w \cdot \bar{z}}_{\overline{z \cdot w}} + \underbrace{w \cdot \bar{w}}_{|w|^2}$$

$$|z|^2 + 2|z| \cdot |w| + |w|^2 \geq$$

$$\parallel$$

$$(|z| + |w|)^2$$

$\Rightarrow \text{OK.}$

$$2 \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})$$

$$\wedge$$

$$2 |\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w})|$$

$$\wedge$$

$$2 |z \cdot \bar{w}|$$

"

$$2 |z| \cdot |\bar{w}|$$

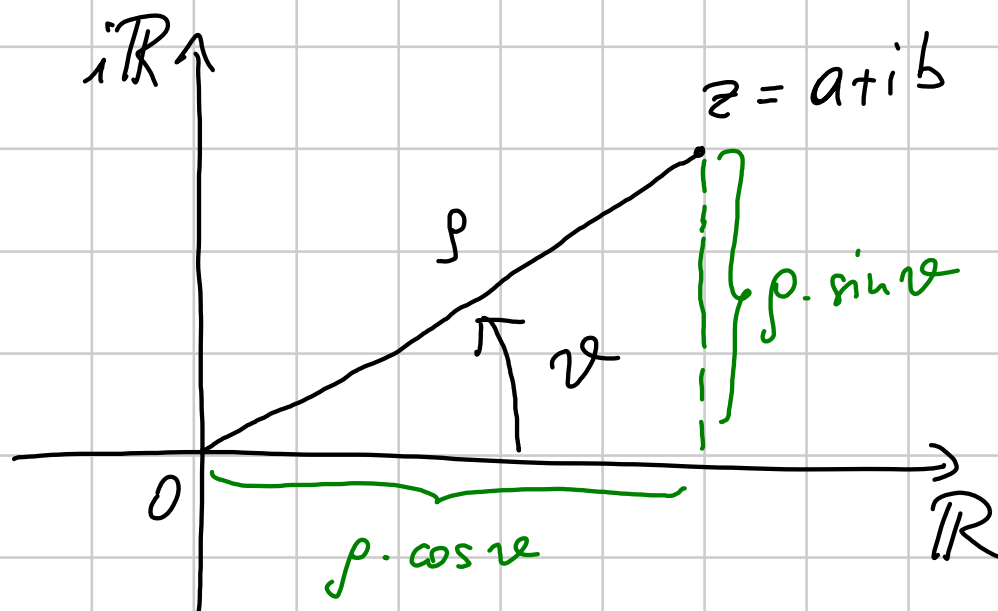
"

$$2 |z| \cdot |w|$$



Forma polare o trigonometrica:

espresso $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \leftrightarrow a+ib$ in coord. polari ρ, ϑ



$$\Rightarrow \rho = |z| ; \vartheta = \arg(z) \quad \text{argomento}$$

Attenzione: $\arg(z)$ non è unico:

- se $z = 0$ va bene qualsiasi $\vartheta \in \mathbb{R}$
- se $z \neq 0$ e ϑ_0 è un argomento, anche $\vartheta_0 + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ lo è

Abbiamo: $z = \rho \cdot (\cos \vartheta + i \cdot \sin \vartheta)$ -

Visto: $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ -

Prop: $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$ -

Dim: posto $z = \rho (\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$
 $w = \eta (\cos \varphi + i \sin \varphi)$ ho

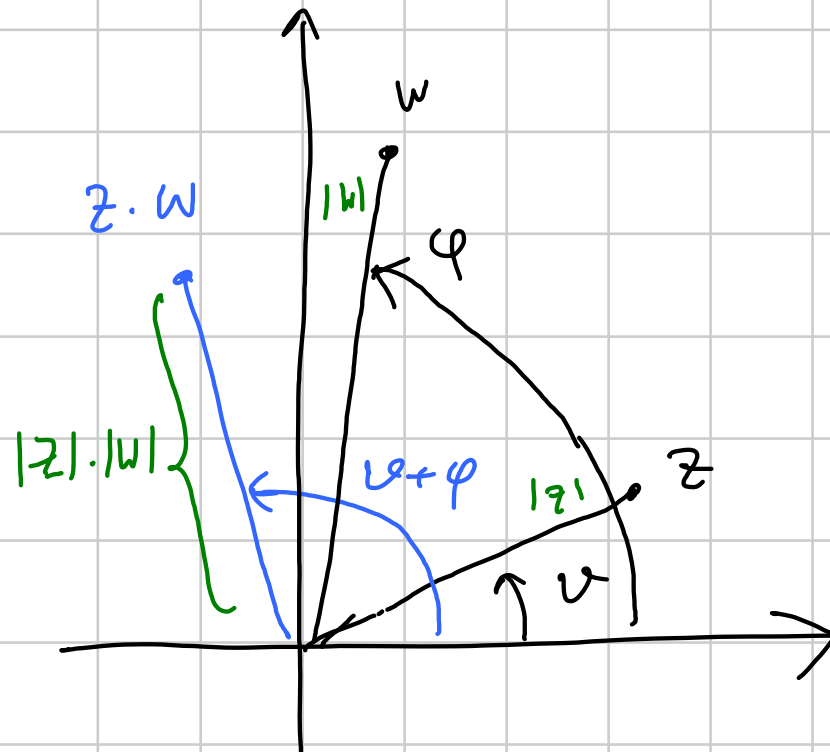
$$z \cdot w = \rho \cdot \eta \cdot \left(\underbrace{\cos \vartheta \cdot \cos \varphi - \sin \vartheta \cdot \sin \varphi}_{\cos(\vartheta + \varphi)} + i \cdot \underbrace{(\cos \vartheta \cdot \sin \varphi + \sin \vartheta \cos \varphi)}_{\sin(\vartheta + \varphi)} \right)$$

$$= \underbrace{\rho \cdot \eta}_{|z \cdot w|} \cdot \left(\underbrace{\cos(\vartheta + \varphi)}_{\cos(\vartheta + \varphi)} + i \cdot \underbrace{\sin(\vartheta + \varphi)}_{\sin(\vartheta + \varphi)} \right)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\arg(z \cdot w)}$



Interpretazione geometrica:



Oss: fissa z la trasformazione

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$w \longmapsto z \cdot w$$

è la composizione di

- omotetia di centro O e ragione $|z|$
- rotazione di angolo $\arg(z)$ intorno a O

Enunciato equiv. della Prop.:

Posto $E(v) = \cos v + i \cdot \sin v$ si ha

$$E(v + \varphi) = E(v) \cdot E(\varphi)$$

Ricordiamo: se $\lambda > 0$ si ha $\lambda^{t+s} = \lambda^t \cdot \lambda^s$

$\Rightarrow$ cioè E soddisfa le proprietà fondamentali dell'esponenziale — Scommuene: scriviamole come esponenziale (con base con reale); fatto:

la scelta giuste della base è e^i ; cioè
conveniamo

$$e^{iv} = \cos v + i \cdot \sin v$$

Giustificazione analitica: approssimaz. di Taylor

$$e^t \cong 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{6}t^3 + \dots + \frac{1}{n!}t^n + \dots$$

$$\cos t \cong 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\sin t \approx t - \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{120}t^5 + \dots + (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Fatto: facendo somme infinite sono grandezze:

$$e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$$

$$\cos t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin t = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Ora:

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n \cdot \varphi^n}{n!} =$$

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = +1$$

$$i^5 = i \dots$$

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{v^{2k}}{(2k)!}}_{\cos v} + i \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{v^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{\sin v}$$

$$\Rightarrow e^{iv} = \cos v + i \cdot \sin v.$$

Con: per $v = \pi$ ho $e^{i \cdot \pi} = -1 \Rightarrow e^{i\pi} + 1 = 0$.

Equazioni polinomiali.

$$\mathbb{C}[z] = \left\{ a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_d z^d : d \in \mathbb{N} \right. \\ \left. a_0, \dots, a_d \in \mathbb{C} \right\}$$

(solite avvertenze: mettere e togliere $0 \cdot z^k$)

Q: quante soluz. ha una equaz. $p(z) = 0$
con $p(z) \in \mathbb{C}[z]$, $\deg(p(z)) = n$?

Primo caso : $z^m = \alpha$ con $\alpha \in \mathbb{C}$
(soluzioni: radici m -esime di α) —

Su $\mathbb{R}$:

$$x^m = a$$

: $\begin{cases} 2 \text{ soluz. se } m \text{ è pari, } a > 0 \\ \text{nessuna se } m \text{ è pari, } a < 0 \\ \text{una altrimenti} \end{cases}$

($\Rightarrow$ il numero di soluz. non dipende da m
ma dalla sua parità) —

Su $\mathbb{C}$: iniziamo da $z^m = 1$
(radici m -esime di 1)

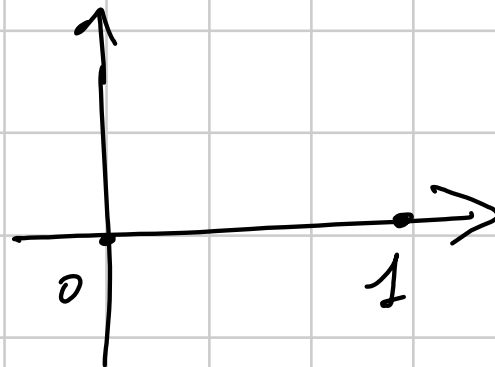
Cerchiamo le soluz. z scritte in forme polare
 $z = \rho e^{i\varphi}$

Yopliamo $(\rho \cdot e^{i\varphi})^m = 1$ cioè

$$\rho^m \cdot e^{im\varphi} = 1 \quad \text{cioè}$$

$$\begin{cases} \rho^m \text{ è } \underline{\underline{\text{il modulo di } 1}} \\ m\vartheta \text{ è } \underline{\underline{\text{un argomento di } 1}} \end{cases}$$

$$e^{i\vartheta}$$

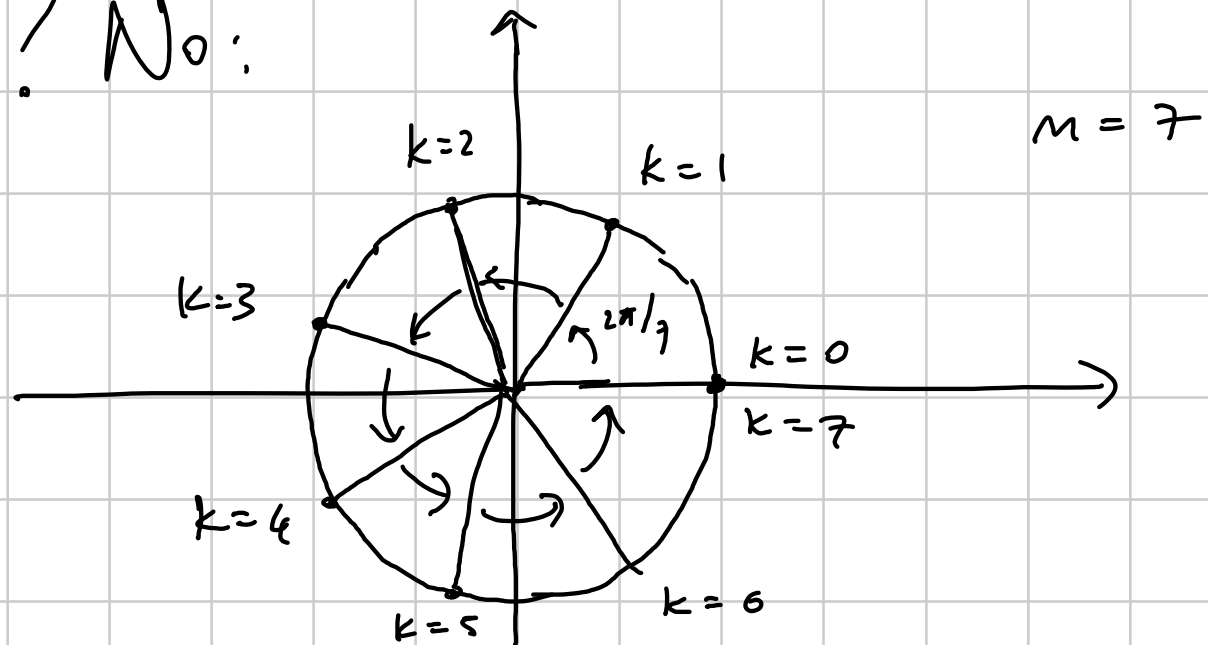


$$\begin{cases} \rho^m = 1 \\ m\vartheta = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$e^{i\vartheta}$$

$$\begin{cases} \rho = 1 \\ \varphi = \frac{2\pi k}{n} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Infinitely solut? No:

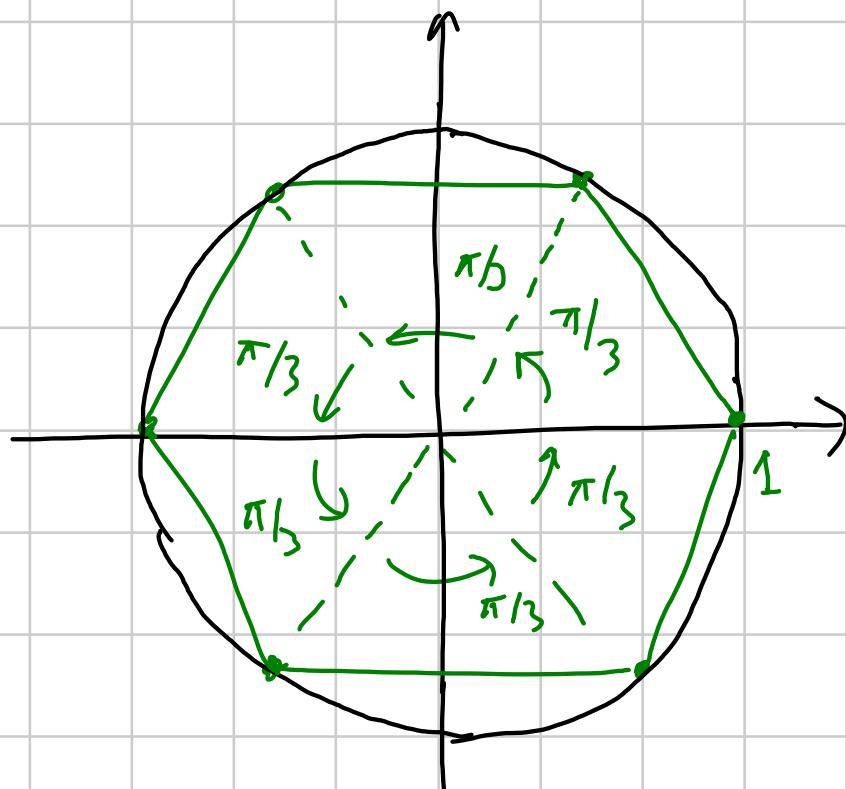


Esattamente n soluz. distinte.

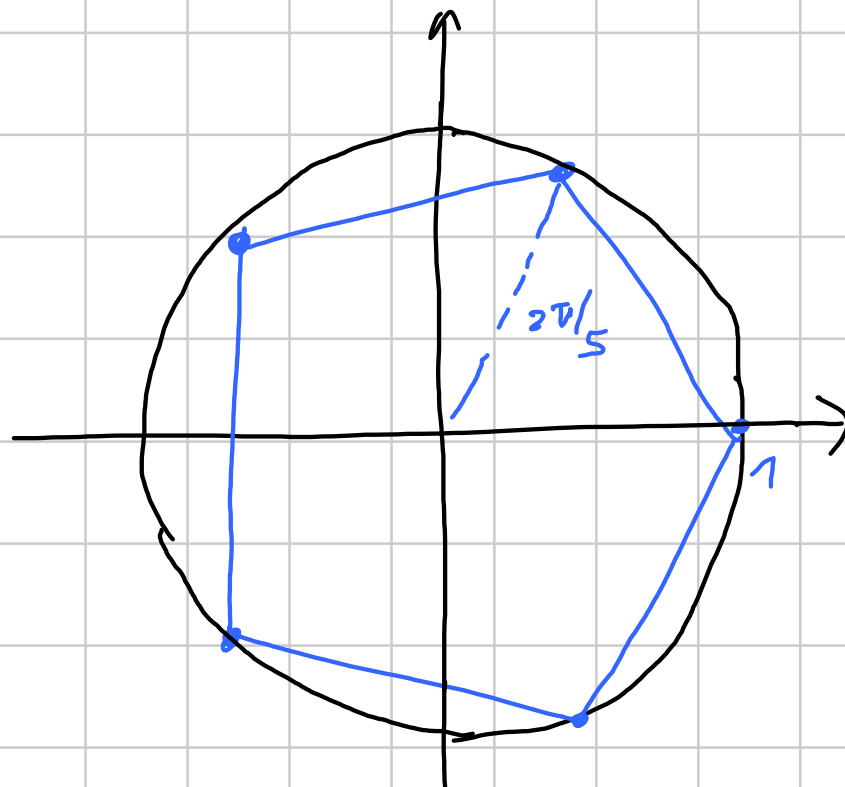
$$e^{\frac{2k\pi i}{n}}$$

$$k = 0, \dots, n-1$$

e sono i vertici del poligono regolare con n lati inscritto nella circonfer. di centro O e raggio 1 con i suoi vertici;



$n = 6$



$n = 5$

Caso generale: $z^n = \alpha$ (con $\alpha \neq 0$);
stesso metodo: se $\alpha = r \cdot e^{i\varphi}$ le radici sono
$$\sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\varphi + k\pi)/n} \quad k = 0, \dots, n-1$$

Dunque ci sono sempre n radici
(per $\alpha = 0$ una sola radice ma con
multiplicità n)

Teo (fondamentale dell'algebra — difficile) :

ogni polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ di
grado $n > 0$ ammette radici —

Oss: appioppato a $\mathbb{R}$ la radice di $x^2 + 1 = 0$
abbiamo aggiunto le radici di quadrati polinomio.

In realtà: $p(z)$ di grado n ha
esattamente n radici contate con molteplicità —

Fatto: anche in $\mathbb{C}[z]$ c'è la divisione:

dati $f(z), g(z) \in \mathbb{C}[z]$ con $g(z) \neq 0$
esistono unici $q(z), r(z) \in \mathbb{C}[z]$ t.c.

$$\begin{cases} f(z) = g(z) \cdot q(z) + r(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \deg(r(z)) < \deg(g(z)) \end{cases} \quad (\text{Dimo: uguale -})$$

Con (Teo di Ruffini):

z_0 è una radice di $p(z) \iff p(z)$ è
divisibile per $(z - z_0)$.

Dim : divido $p(z)$ per $(z-z_0)$:

$$p(z) = (z-z_0) \cdot q(z) + r(z)$$

$$\deg(r(z)) < \deg(z-z_0) = 1$$

$$\Rightarrow r(z) = r \in \mathbb{C}.$$

$$H_0 \quad p(z) = (z-z_0) \cdot q(z) + r ;$$

sostituisco $z = z_0$:

$$p(z_0) = r -$$

Dunque : z_0 radice $\downarrow$ $p(z) \iff r = 0$

$\iff z-z_0$ divide $p(z)$. $\square$

Multiplicità: sia z_0 radice di $p(z)$

$$p(z) = (z - z_0) \cdot q_1(z) ; q_1(z_0) \begin{cases} \neq 0 \longrightarrow \text{mult} = 1 \\ = 0 \longrightarrow q_1(z) = (z - z_0) q_2(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(z) = (z - z_0)^2 \cdot q_2(z) ; q_2(z_0) \begin{cases} \neq 0 \quad \text{mult} = 2 \\ = 0 \quad q_2(z) = (z - z_0) q_3(z) \end{cases}$$

$$\Rightarrow p(z) = (z - z_0)^3 \cdot q_3(z) \quad \dots$$

$$(\deg p_j(z) = n - j \Rightarrow \text{finito}) -$$

Cioè: la molt. di z_0 come radice di $p(z)$ è
il massimo intero k t.c.

$(z - z_0)^k$ divide $p(z)$; ovvero la molt. è
 m se $p(z) = (z - z_0)^m \cdot q(z)$ e $q(z_0) \neq 0$.

NO: la molt. di z_0 è il numero di volte
che z_0 è radice di $p(z)$

Prop (assumendo il Teo fond. dell'algebra):
un polinomio $p(z) \in \mathbb{C}[z]$ di grado n ha

esattamente N radici contate con molteplicità.

Dici: Esiste radice z_1 con molt. m_1

$$\Rightarrow p(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdot p_1(z) ; \deg(p_1(z)) = \begin{cases} 0 & \text{finito} \\ > 0 \end{cases}$$

$\Downarrow$
ha radice $z_2 \neq z_1$

$$\Rightarrow p(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdot (z - z_2)^{m_2} \cdot p_2(z)$$

procedo così: alla fine

$$p(z) = \alpha \cdot (z - z_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (z - z_k)^{m_k} \quad \begin{array}{l} \alpha \in \mathbb{C} \\ \alpha \neq 0 \end{array}$$

radici $z_1, \dots, z_k$ con mult. $m_1, \dots, m_k$

$$\text{e } m_1 + \dots + m_k = n$$



— • —

Spazi vettoriali su $\mathbb{C}$: le def. è come
su $\mathbb{R}$ e valgono tutti i teoremi/costruzioni...

perché trattando gli $\mathbb{R}$ -sp. vett. abbiamo
usato solo il fatto che $\mathbb{R}$ è un campo.

Def: V $\mathbb{C}$ -sp. vett. se ho

$$+ : V \times V \rightarrow V \quad \cdot : \mathbb{C} \times V \rightarrow V$$

che soddisfano 1-8 identico a quelle
degli $\mathbb{R}$ -sp. vett.

TUTTO VALE: esempio:

$$W = \left\{ z \in \mathbb{C}^4 : \begin{array}{l} (1+i)z_1 - z_2 + 2iz_3 + 7z_4 = 0 \\ 5iz_1 + (1-i)z_2 + iz_3 + (4-i)z_4 = 0 \end{array} \right\}$$

$\bar{W}$ è un sottosp. vett. di $\mathbb{C}^4$ definito
da equazioni lineari omogenee
nelle coordinate. Inoltre:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} 1+i & -1 & 2i & 7 \\ 5i & 1-i & i & 4-i \end{pmatrix}$$

vale 2 perché $\det \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 1-i & 4-i \end{pmatrix} =$

$$= -4 + i - 7 + 7i = -11 + 6i \neq 0$$

$\Rightarrow W$ ha dimensione $4-2=2$
 cioè ha una base con 2 elementi

Per trovare: $z_2 = (1+i)z_1 + 2iz_3 + 7z_4$

$$(5i + (1-i)(1+i))z_1 + (i + (1-i)2i)z_3 + ((4-i) + (1-i) \cdot 7)z_4 = 0$$

alle tre trova

$$\begin{aligned} z_3 &= \alpha z_1 + \beta z_4 \\ z_2 &= \gamma z_1 + \delta z_4 \end{aligned} \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$$

$$\Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{e} \text{ basi di } V$$

cioè:

- lin. indep: gli unici $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ t.c. $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$
sono $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$
- generano: ogni $v \in V$ si scrive come

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \quad \text{con} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}.$$

Oss: uno spazio vett. su $\mathbb{C}$
 è anche uno sp. vett. su $\mathbb{R}$.

Es: $\mathbb{C}^2$ è sp. vett. su $\mathbb{C}$ e so fare

$$(1-i) \cdot \begin{pmatrix} 1+2i \\ 2-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+i \\ -1-5i \end{pmatrix}$$

↑
 operaz. di $\mathbb{C}^2$ come $\mathbb{C}$ -sp. vett.
 ma non come $\mathbb{R}$ -sp. vett.

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 4-i \\ -3+5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28-7i \\ -21+35i \end{pmatrix}$$



operaz. di $\mathbb{C}^2$ come $\mathbb{R}$ -sp. vett.
e anche come $\mathbb{C}$ -sp. vett.

$$\underline{Q_{SS}} : \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix}$$

pensando $\mathbb{C}^2$ come $\mathbb{R}$ -sp. vett. sono lin. indep.

invece come $\mathbb{C}$ -sp. vett. ho: $\begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix} = i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

Oss: $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}$ -sp. vett. è $\mathbb{R}^2$.

In generale $\mathbb{C}^n$ come $\mathbb{R}$ -sp. vett. è $\mathbb{R}^{2n}$.

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n \quad \left(\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n \right).$$

Prop: Se V è uno sp. vett. su $\mathbb{C}$ ($\Rightarrow$ anche su $\mathbb{R}$)

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V).$$

Dim: Se $v_1, \dots, v_m$ è una $\mathbb{C}$ -base allora

$v_1, iv_1, v_2, iv_2, \dots, v_m, iv_m$ è una $\mathbb{R}$ -base. $\square$

_____ o _____

Esercizi foglio 27/11/14.

③ $A = (v_1, \dots, v_m)$ - Calcolare $\det(B)$:

(a) $\det(A) = -3$, $B = (3v_1 - 2v_2, -5v_1 + 4v_2)$

$$\det(B) = 3 \cdot \det(v_1, -5v_1 + 4v_2) - 2 \det(v_2, -5v_1 + 4v_2)$$

$$= 3 \cdot (-5) \cdot \cancel{\det(v_1, v_1)} + 3 \cdot 4 \cdot \underbrace{\det(v_1, v_2)}_{\det(A)} +$$

$$(-2) \cdot (-5) \cdot \underbrace{\det(v_2, v_1)}_{-\det(A)} + (-2) \cdot 4 \cdot \cancel{\det(v_2, v_2)}$$

$$= (12 - 10) \cdot \det(A) = -6$$

$$(c) \det(A) = 6 \quad B = (v_3 - v_1, v_1 - 3v_4, 2v_2 + v_4, v_3 - 2v_4)$$

$\det(B) = \dots$ usando la linearità nelle colonne
viene somma di 16 addendi; ma
ognuno di essi è nullo o ha
due colonne uguali;

INVECE . cerco quelli non nulli

$$= 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-2) \cdot \det(v_3, v_1, v_2, v_4) \\ + (-1) \cdot (-3) \cdot 2 \cdot 1 \cdot \det(v_1, v_4, v_2, v_3)$$

$$= -4 \cdot \underbrace{\det(v_3, v_1, v_2, v_4)}_{+ \det(A)} + 6 \cdot \underbrace{\det(v_1, v_4, v_2, v_3)}_{+ \det(A)}$$

- $(3, 1, 2, 4) \rightarrow (1, 3, 2, 4) \rightarrow (1, 2, 3, 4)$

- $(1, 4, 2, 3) \rightarrow (1, 2, 4, 3) \rightarrow (1, 2, 3, 4)$

$$\Rightarrow 2 \cdot \det(A) = 12$$

Método alternativo:

$$B = (v_3 - v_1, v_1 - 3v_4, 2v_2 + v_4, v_3 - 2v_4)$$

$$= \underbrace{(v_1, v_2, v_3, v_4)}_A \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(B) = \det(A) \cdot \det(K) \quad \uparrow \quad) \quad -$$

④ trovare inverse -

$$(d) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 6 + 12 - 1 \\ -8 + 1 - 9 = 1$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 13 & - & . \\ - & . & . \end{pmatrix}$$

⑤ Risolvere = trovare tutte le soluzioni

$$(a) \begin{cases} 2x - y + 3z = 26 \\ -3x + 2y + 7z = 17 \\ 4x + 3y - z = 2 \end{cases}$$

$$Cramer: \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} = -4 - 28 - 27 - 24 + 3 - 42 = -122$$

$$x = \frac{\det \begin{pmatrix} 26 & -1 & 3 \\ 17 & 2 & 7 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}}{-122} = \frac{-488}{-122} = 4$$

$$y = \dots$$

$$z = \dots$$