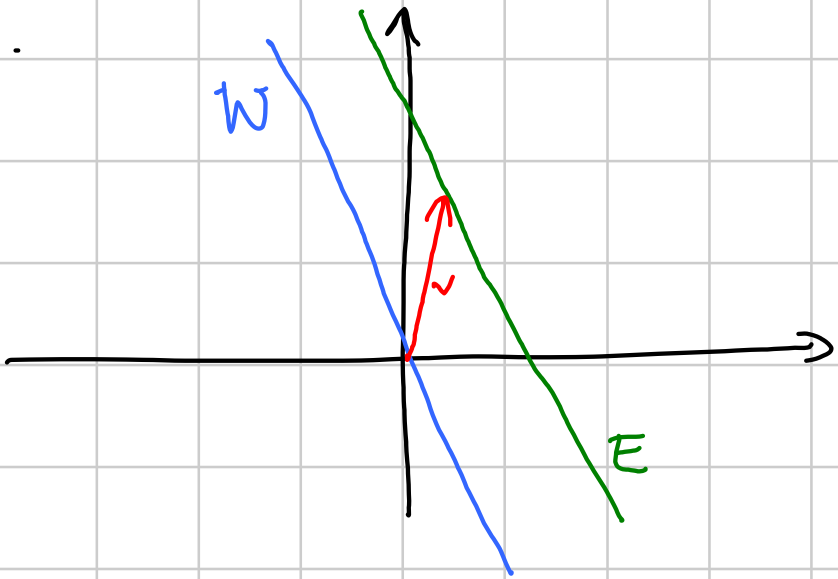
Alg. Lin. 2/12/14

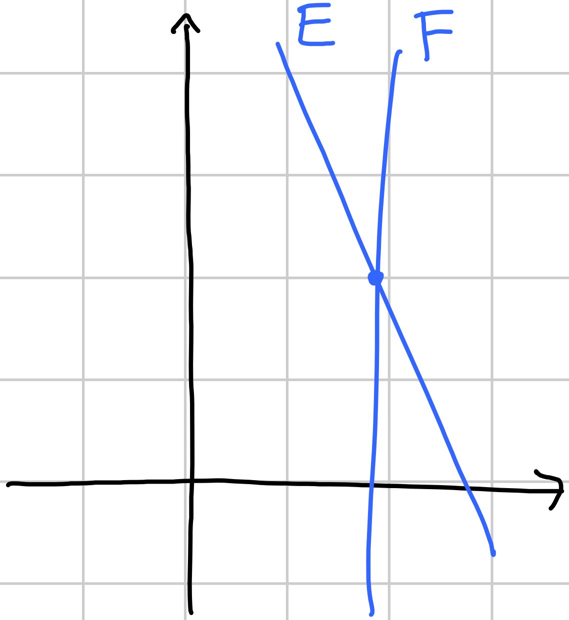
Stsp. affine di $\bar{V}$ sp. vett. è $E = v + \bar{W}$

$v \in \bar{V}$, $W \subset \bar{V}$ stsp. vett.



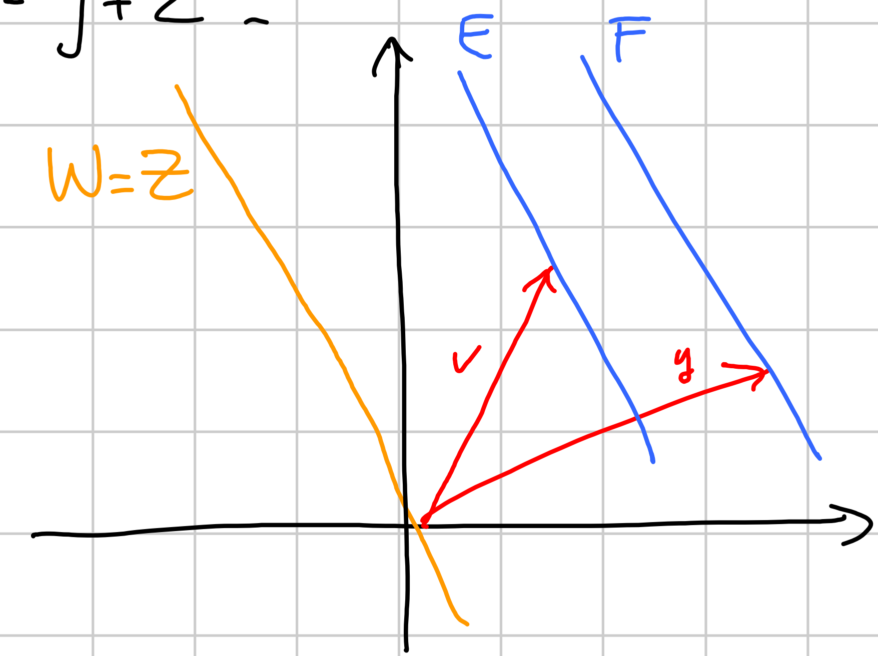
Posizione reciproca di due sts. aff.

$E = v + W \quad , \quad F = y + Z \; .$



incidente

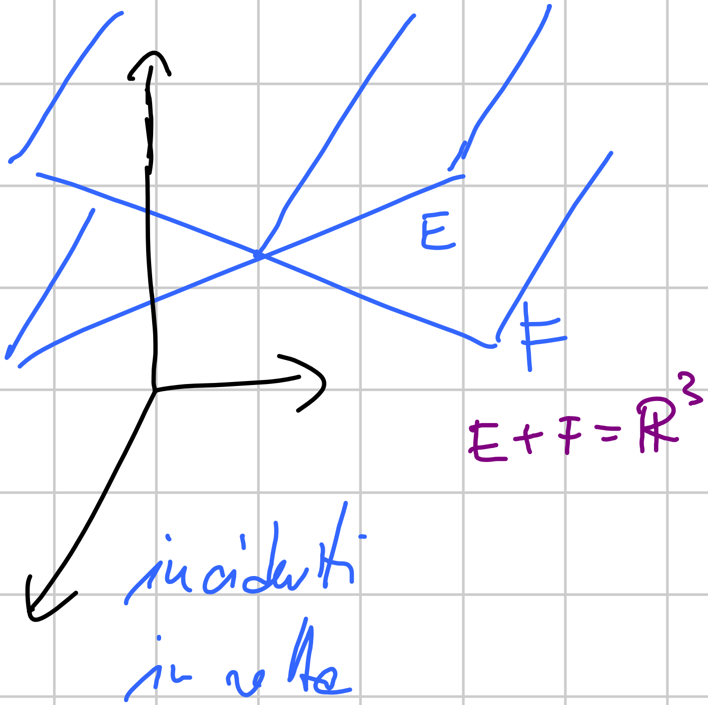
$E + F = \mathbb{R}^2$

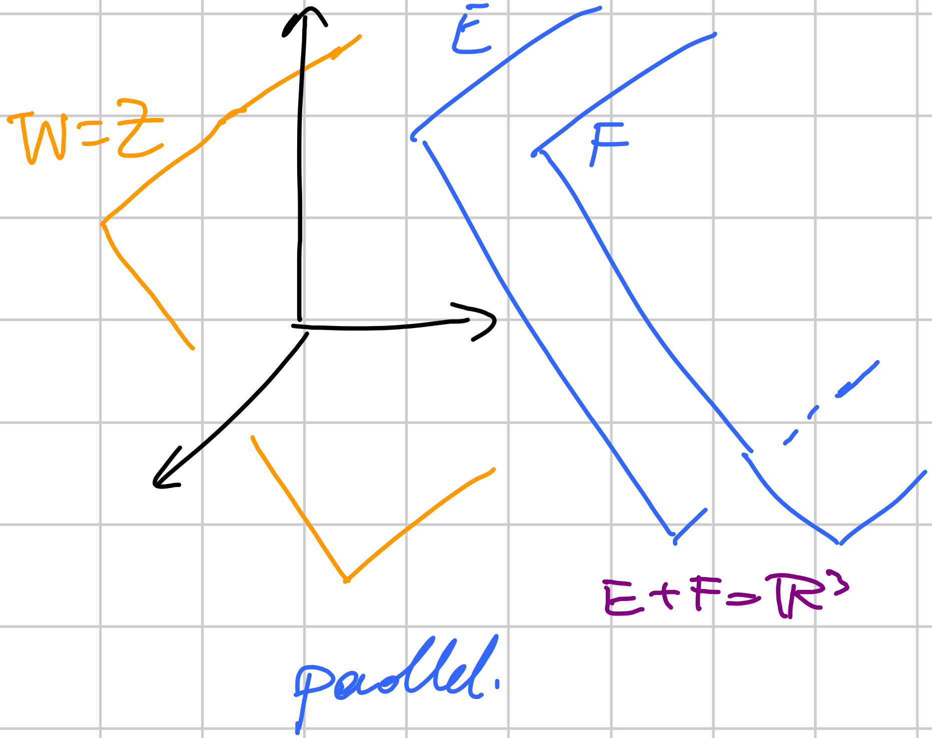


parallele

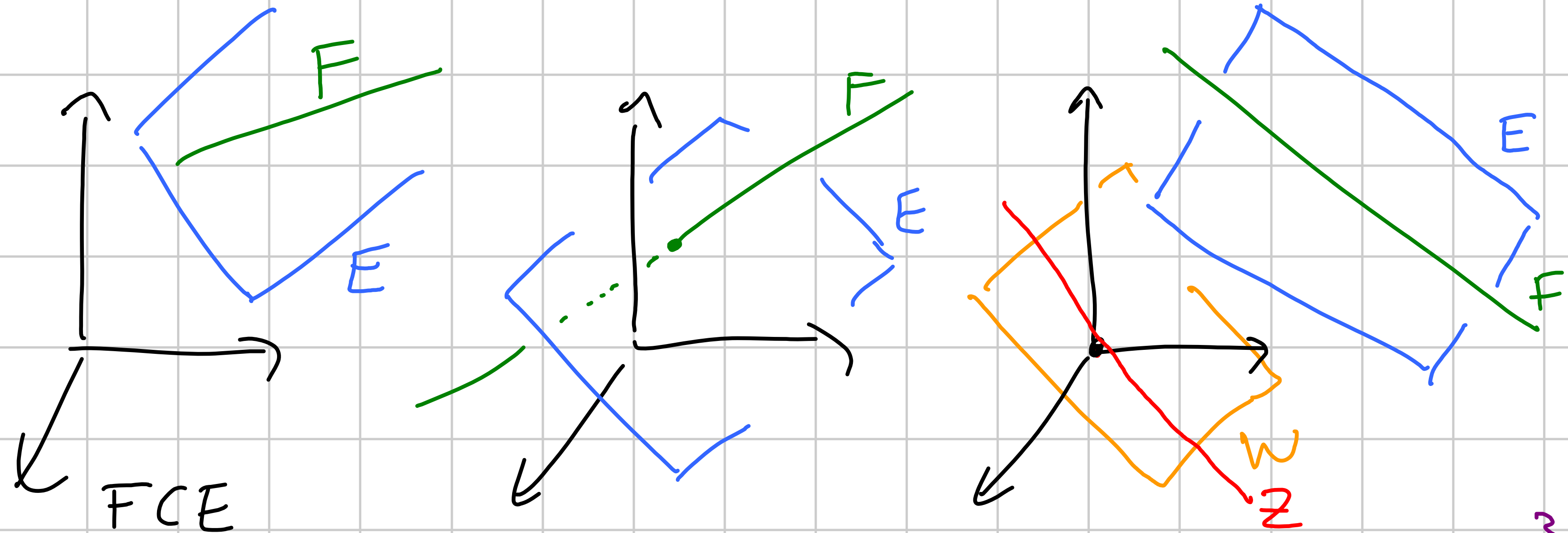
$E + F = \mathbb{R}$

(due rette distinte in $\mathbb{R}^2$)





(due piani in $\mathbb{R}^3$ distinti)



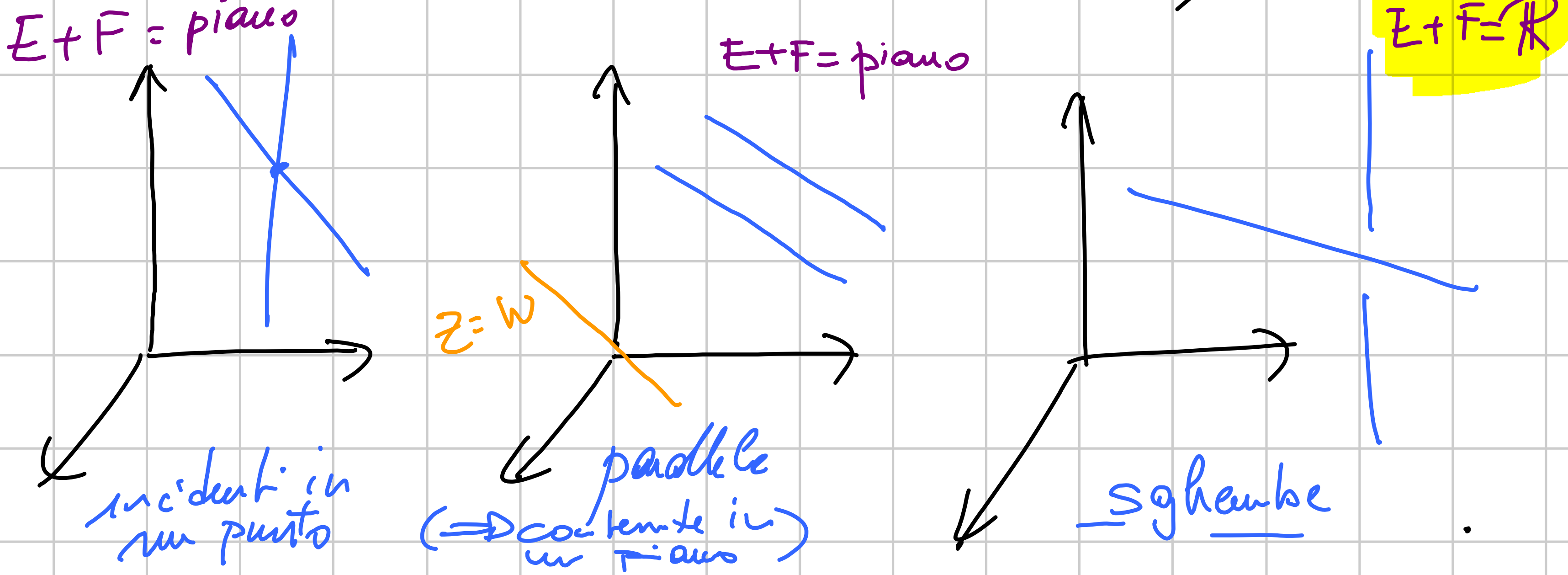
$F \subset E$ $\quad$ $E+F=E$

incidenti in un punto $\quad$ $E+F=\mathbb{R}^3$

paralleli $\quad$ $E+F=\mathbb{R}^3$

<u>Def</u>: dico che E ed F sono paralleli, scrivo $E \parallel F$ se $W \subset Z$ oppure $Z \subset W$.

due rette in $\mathbb{R}^3$ (distinte)



Richiamo: $W+Z$ è per def. il più piccolo sottosp. vett. che contiene W e Z e si ha:

- $W+Z = \{ w+z : \quad w \in W, z \in Z \}$
- $\dim(W+Z) = \dim(W) + \dim(Z) - \dim(W \cap Z)$.

Def: dati $E = v + W$, $F = y + Z$ stsp. affini, chiamo $E+F$ il più piccolo stsp. affine che contiene sia E sia F.

Prop:

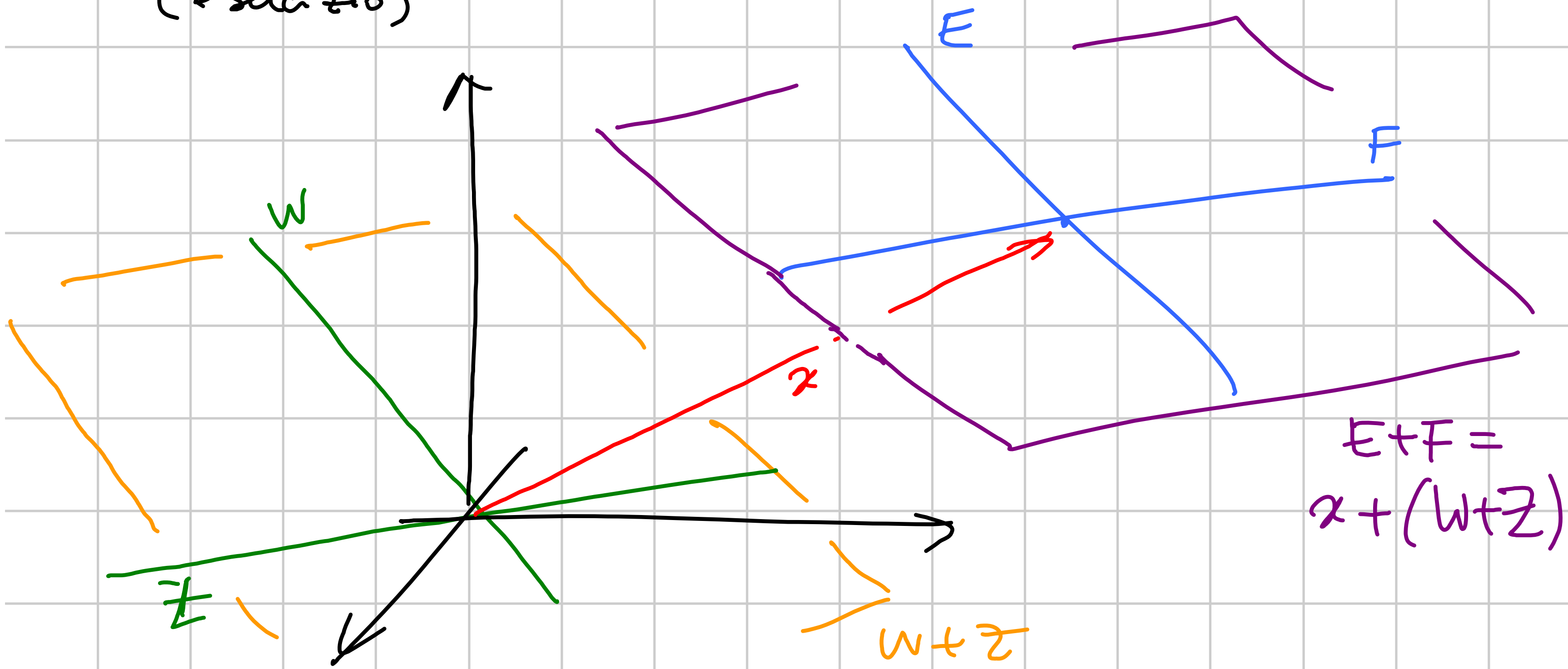
$$\dim(E+F) = \begin{cases} \dim(W+Z) & \text{se } E \cap F \neq \emptyset \\ 1 + \dim(W+Z) & \text{se } E \cap F = \emptyset . \end{cases}$$

Dim: Se $E \cap F \neq \emptyset$ prendo $x \in E \cap F$ e ho

$E = x + W$, $F = x + Z$

$\Longrightarrow$ $E + F = x + (W + Z)$:

(esercizio)



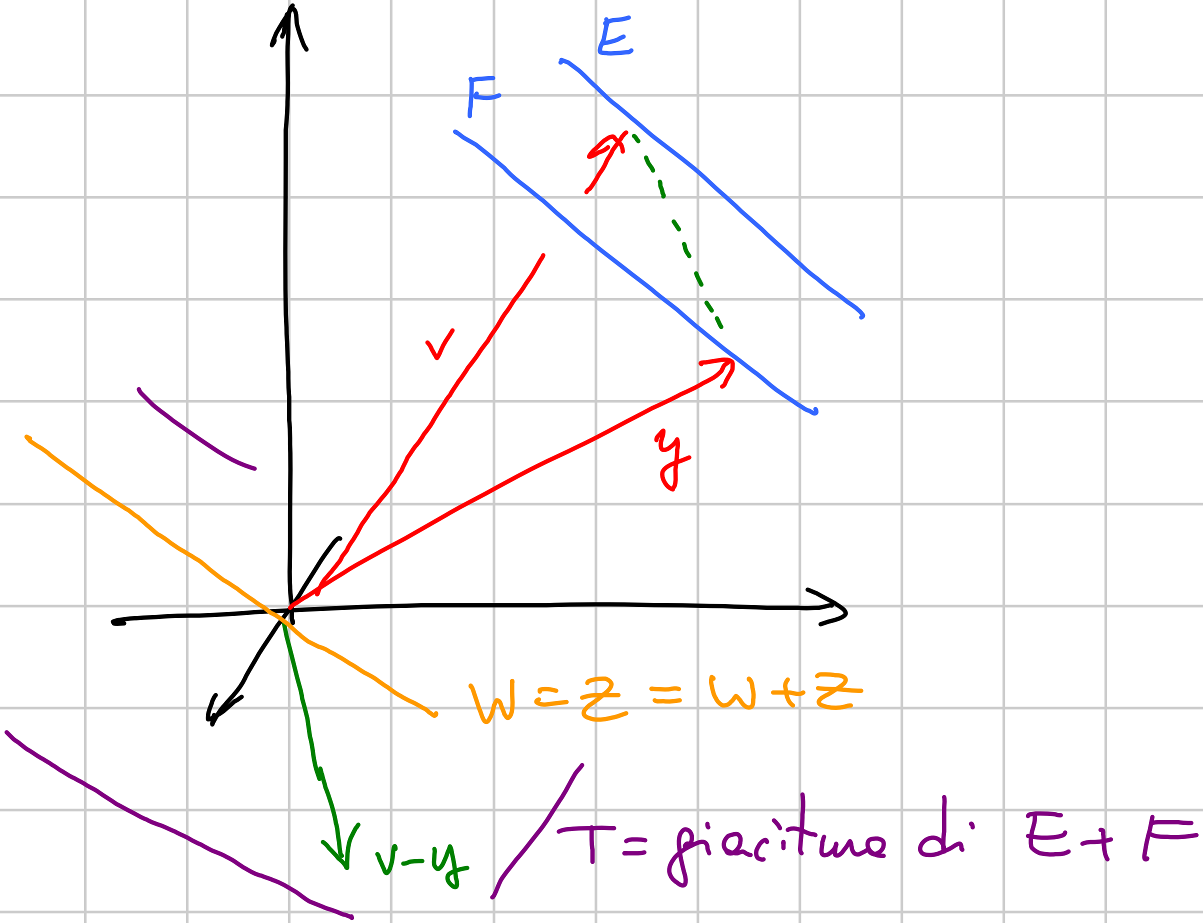
Sia invece $E \cap F = \emptyset$. Affermo:

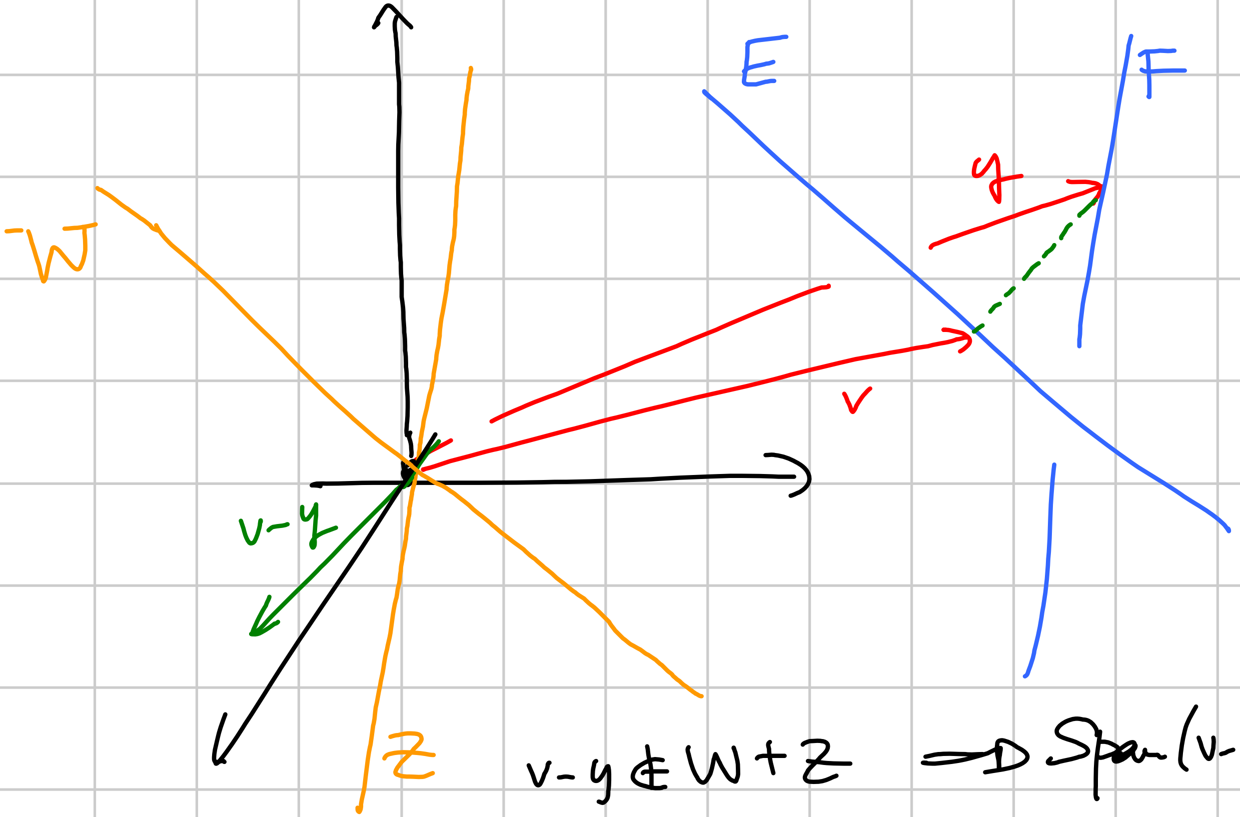
(1) $v - y \notin W + Z$

(dunque: $T = \mathrm{Span}(v-y) \oplus (W+Z)$
ha dim $= \quad 1 \quad + \dim(W+Z)$)

(2) $E + F = v + T$ (dunque: la tesi).

(Dimostrare poco; esempi:


E
F
x
v
y
W = Z = W + Z
v - y
T = giacitura di E + F



$v-y \notin W+Z \Rightarrow \mathrm{Span}(v-y)+W+Z=\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow E+F=V+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3$.)

<u>Dimo:</u> (1) $v-y \notin W+Z$. Altrimenti

$$v-y = w+z \implies v-w = y+z$$

$$v-w \in v+W = E$$

$$y+z \in y+Z = F$$

si ha l'assurdo

$$E \cap F \neq \emptyset.$$

(2) esercizio.

$\blacksquare$

<u>Oss</u>: attenzione all'uso dell'intuizione in dim ≥ 3 _

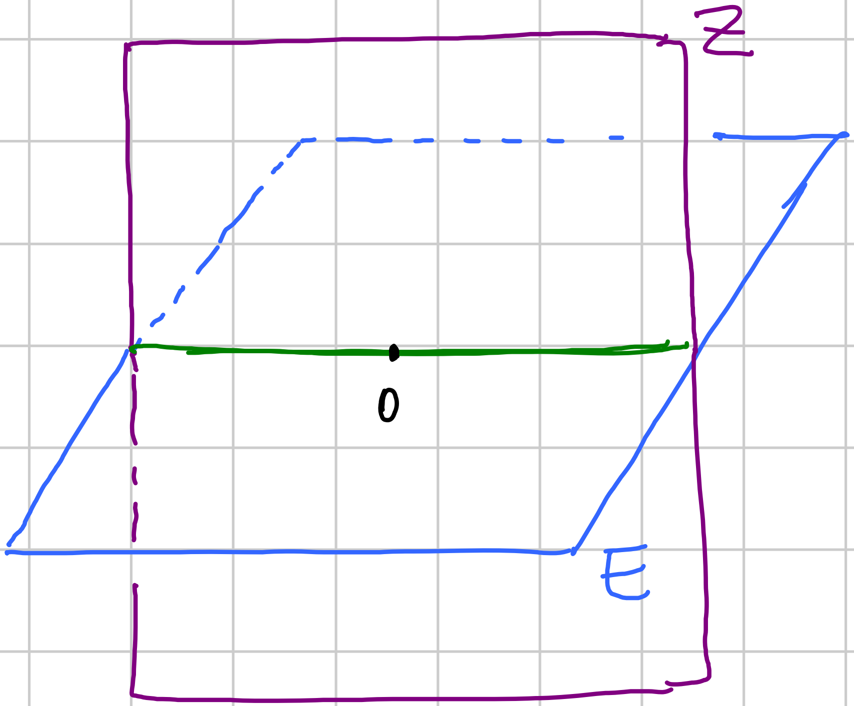
non usarla: invece Grassmann e la sua versione per st sp. affini _

<u>Es</u>: Esistono due piani disgiunti e non paralleli?

In $\mathbb{R}^3$ no: due piani non paralleli distinti si intersecano in una retta _

In $\mathbb{R}^4$ si: $E = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$

$F = e_4 + \mathrm{Span}(e_1, e_3)$



$F = Z$ traslato nella IV dimensione.

Numeri complessi.

<u>Fatto</u>: l'equaz. $x^2+1=0$ non ha soluz. $x \in \mathbb{R}$.
Inventiamo un oggetto, i = unità immaginaria
che non è in $\mathbb{R}$ e risolve l'equazione, cioè
$i^2+1=0$ $(i^2=-1)$.

Se trattiamo i come numero possiamo fare:

$\to$ $a+i$ con $a \in \mathbb{R}$
$\to$ $i \cdot b$ con $b \in \mathbb{R}$

$\Big\}$ inventati

$\rightarrow \quad a + i \cdot b \quad$ con $\; a, b \in \mathbb{R} \quad \}$

$\rightarrow \quad (a+i\cdot b) + (c+i\cdot d) = \underbrace{(a+c) + i\cdot(b+d)}_{\text{già inventato: è del tipo } \alpha + i\beta}$

$\rightarrow \quad (a+i\cdot b)\cdot(c+i\cdot d) = a\cdot c + a\cdot i\cdot d + i\cdot b\cdot c + i\cdot b\cdot i\cdot d$

$= a\cdot c + i^2 \cdot b\cdot d + i\cdot(a\cdot d + b\cdot c)$

$= \underbrace{(a\cdot c - b\cdot d) + i\cdot(a\cdot d + b\cdot c)}_{\text{già inventato: è del tipo } \alpha + i\beta}$.

Posto $\mathbb{C} = \{a + i \cdot b : \ a, b \in \mathbb{R}\}$

insieme dei numeri complessi

abbiamo definito due operazioni

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$(a+ib) + (c+id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$

$$(a+i \cdot b) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i\,(ad+bc)$$

Scriviamo per semplicità:

$$a + i \cdot 0 = a \quad \Longrightarrow \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

$(0 + i \cdot b = i \cdot b \implies i \cdot \mathbb{R} \subset \mathbb{C})$.

Quindi abbiamo $\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1$.

Teo: $\mathbb{C}$ con tali strutture è un campo, cioè:

(1)-(4) : $\mathbb{C}, +, 0$ gruppo commut

(5)-(8) : $\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot, 1$ gruppo commut

(9) : distrib.

Dim: tutte facili tranne la (6) (esistenza dell'inverso).

(3) $$((a+ib)+(c+id))+(x+iy) \stackrel{?}{=} (a+ib)+((c+id)+(x+iy))$$

$$((a+c)+i(b+d))+(x+iy) \qquad\qquad (a+ib)+((c+x)+i(d+y))$$

$$((a+c)+x)+i((b+d)+y) \qquad\qquad (a+(c+x))+i(b+(d+y))$$

<u>Sì</u>

(6) Prendiamo $a+ib \neq 0$ cioè $a+i\cdot b \neq 0+i\cdot 0$ cioè $a\neq 0$ oppure $b\neq 0$.

Cerco $x+i\cdot y$ che sia $(a+i\cdot b)^{-1}$, cioè:

$$(a+i\cdot b)\cdot(x+iy) = 1 \quad \text{cioè}$$

$$(a\cdot x - b\cdot y) + i\cdot(b\cdot x + a\cdot y) = 1 + i\cdot 0, \text{ cioè}$$

$$\begin{cases} a\cdot x - b\cdot y = 1 \\ b\cdot x + a\cdot y = 0 \end{cases}.$$

$$\det\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 > 0$$

(a, b non entrambi nulli)

$\Longrightarrow$ esiste soluz unica

$$x = \frac{a}{a^2+b^2} \, , \quad y = -\frac{b}{a^2+b^2} \, . \qquad \blacksquare$$

Abbiamo provato: $(a+i\cdot b)^{-1} = \dfrac{a-i\cdot b}{a^2+b^2}$.

Terminologia: se $z = a+i\cdot b \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$

chiamo:

$a = \Re(z)$ parte reale di z

$b = \Im(z)$ parte immaginaria di z .

Attenzione: $\Im(7-5i) = -5 \in \mathbb{R}$

(non è $-5i$) .

Iscrizione agli esami

"Algebra Lineare" = I parte del corso = voi ora

"Geom. e Alg. Lin" = II parte del corso = voi a giugno –

Esercizi foglio 15/11/14.

(10) Trovare base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ t.c. $\forall A \in M_{3\times 2}$

$$[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}^{(3)}} = \begin{pmatrix} 4a_{11} + 7a_{12} & 5a_{11} - 6a_{12} \\ 4a_{21} + 7a_{22} & 5a_{21} - 6a_{22} \\ 4a_{31} + 7a_{32} & 5a_{31} - 6a_{32} \end{pmatrix}.$$

Osservo che : $\quad = A \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}.$

Ricordo la def. di $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}$: è quella matrice t.c

$$f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \quad \text{(def. generale)}.$$

Dunque noi vogliamo che:

$$f_A \cdot \mathcal{B} = \mathcal{E}^{(3)} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

cioè $\quad A \cdot \mathcal{B} = I_3 \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$

dunque la $\mathcal{B}$ cercata è $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$.

(11) Trovare $\mathcal{C}$ base di $\mathbb{R}^2$ t.c.

$$[f_A]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{E}^{(3)}} = \begin{pmatrix} -2a_{11}+5a_{21} & -2a_{12}+5a_{22} & -2a_{13}+5a_{23} \\ 3a_{11}-7a_{21} & 3a_{12}-7a_{22} & 3a_{13}-7a_{23} \end{pmatrix}$$

__Oss:__

$$= \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot A$$

dunque vogliamo:

$$f_A \cdot \mathcal{E}^{(3)} = \mathcal{C} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot A$$

cioè $$A \cdot I_3 = \mathcal{C} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot A$$

cioè $$A = \underbrace{\mathcal{C} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}} \cdot A \qquad \forall A$$

cioè $$\mathcal{C} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} = I_2$$

cioè $$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^{-1}$$

ovvero: $$\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right) -$$

(12) (Prototipo della massima: "pensare e non usare le formule di cambio di base")

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \mathcal{C}' = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}; \quad [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = \_\_$$

So quanto:

$$f\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$
$$f\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}.$$

Devo esprimere $f\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ in coord. rispetto $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$.

$$f\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = f\left(\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \frac{6}{5}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix} + \frac{6}{5}\begin{pmatrix}-1\\10\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}-1\\59\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\left(\frac{175}{7}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \frac{119}{7}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow [f]^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 175/35 & 2 \\ 119/35 & -3/5 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = f\left(\frac{6}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{6}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 29 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left(10 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)_{-}$$

Foglio 27/11/14

1 e $\mathrm{sgn}(7\,5\,2\,8\,1\,4\,3\,6)$

$$(75281436) \xrightarrow[1]{} (15287436) \xrightarrow[2]{} (12587436)$$

$$\xrightarrow[3]{} (12387456) \xrightarrow[4]{} (12347856) \xrightarrow[5]{} (12345876) \xrightarrow[6]{} (12345678)$$

$\Longrightarrow \mathrm{sgn} = +1$

②

$$\det\begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

noto lui: uso III riga per ottenere zeri sulla IV colonna

$$= \det\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 7 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(-1)\cdot(-1)^{3+4}}_{+1} \cdot \det\begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

usa I colonna per ottenere zeri sulla I riga

$$= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 7 \\ -1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot 7 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = 14$$

(f) $\det \begin{pmatrix} 0 & t & -1 & 2 \\ 1-t & 2 & 3 & -6 \\ 2 & -2t & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 & 1+t \end{pmatrix}$

sostituisco con IV + 2 · III col.

$$= \det \begin{pmatrix} 0 & t & -1 & 0 \\ 1-t & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -2t & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & t+5 \end{pmatrix} = (t+5) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1-t & 2+3t & \cdot \\ 2 & -t & \cdot \end{pmatrix}$$

$$= -(t+5) \det \begin{pmatrix} 1-t & 2+3t \\ 2 & -t \end{pmatrix} = \dots$$