Geometria, 17/4/14

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : x \neq 0\} \big/ x \sim y \text{ se } y = \lambda \cdot x$$

Un punto $[x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $x \in \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$

lo indico con

$$[\underbrace{x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}}_{\text{coordinate omogenee}}]$$

Perché ":" : non conta il singolo x_i ma solo i rapporti x_i/x_j.

Es: $[6 : -8 : 14] = [-15 : 20 : -35]$ sono lo stesso punto in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ perché $\begin{pmatrix} -15 \\ 20 \\ -35 \end{pmatrix} = -\frac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix}$.

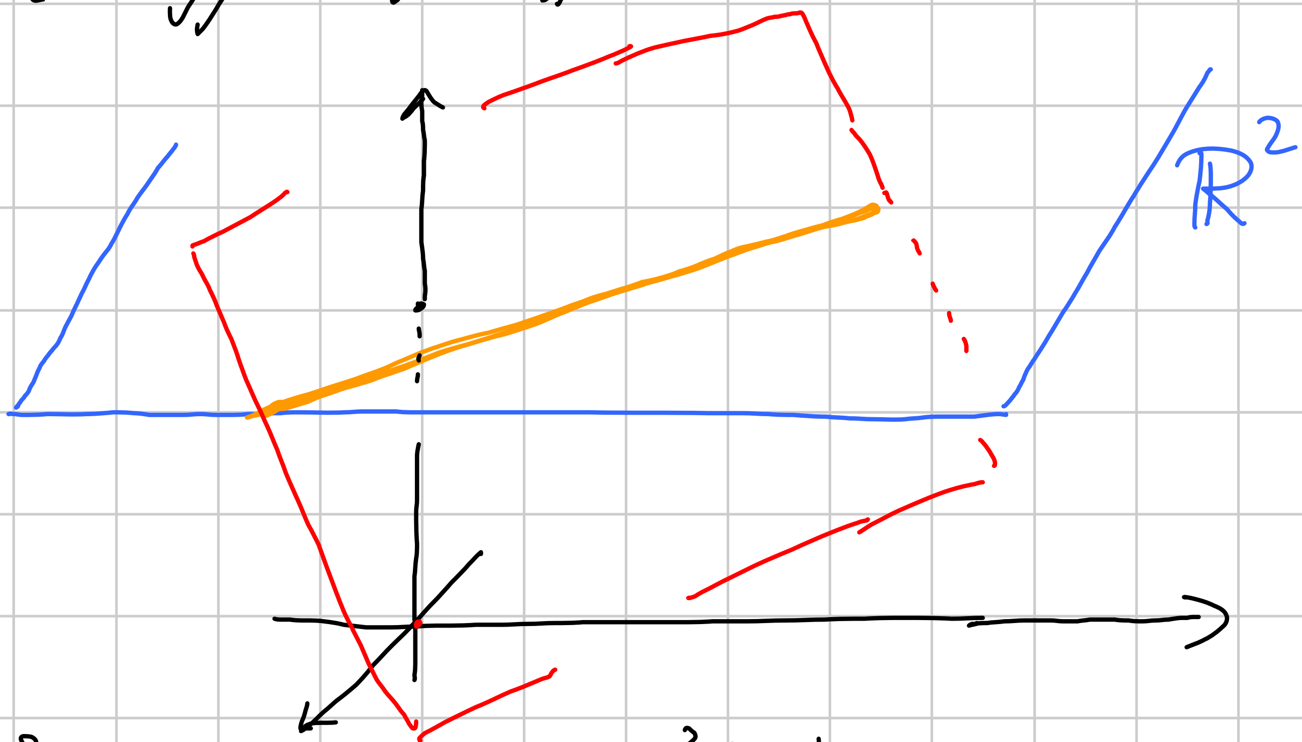
Def: chiamo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proiezione in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^{n+1}$. Se W

ha dim $= k+1$ dico che la sua proiez ha dim $= k$.

<u>Oss</u>: Per due punti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ passa sempre una e una sola retta proiettiva (sttsp. di dim $=1$).
Infatti se ho $[x] \neq [y]$, cioè x, y lin. indip. allora la retta è la proiez. in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di $\mathrm{Span}(x, y)$.

<u>Oss</u>: In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}_{\text{punti a } \infty}$
le rette proiettive sono

- la retta all'∞
- le rette affini in $\mathbb{R}^2$



Rette in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ = proiez. in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di un piano $W \subset \mathbb{R}^3$:

- $W = \mathbb{R}^2 \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ retta all'∞
- W non orizz $\longrightarrow$ retta affine in $\mathbb{R}^2$ (insieme al suo punto all'∞)

<u>Oss</u>: due rette proiettive distinte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si incontrano sempre in un solo punto; in part. se sono entrambe affini:

- o si incontrano in un punto di $\mathbb{R}^2$
- si incontrano all'∞;

(Infatti $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^3$ piani distinti si incontrano in una retta.)

<u>Oss</u>: se $p(x)$ è un polinomio in $x_1, \dots, x_{n+1}$

l'equazione $p(x)=0$ può non avere senso per $[x]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, cioè può accadere che $[x]=[y]$ ma $p(x)=0$ e $p(y)\neq 0$:

$$p(x)=x_1^2-x_2 \qquad [1:1]=[2:2]\in\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

ma $p(1,1)=0$ e $p(2,2)=2\neq 0$.

<u>Oss</u>: Se invece $p(x)$ è omogeneo (tutti i monomi del medesimo grado d) allora l'equaz. $p(x)=0$ ha senso per $[x]\in\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ poiché

se $y = \lambda \cdot x$ allora $p(y) = \lambda^d \cdot p(x)$ dunque $p(y) = 0 \iff p(x) = 0$.

Es: $\{ [x] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \underbrace{x_1^3 - 7x_1x_2^2 + \sqrt{3}\,x_1x_2x_3 + 4x_3^3}_{\text{pol. omogeneo di grado } 3} = 0 \}$

$\implies$ è un luogo ben def.

Cambi di coordinate in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$:

- In $\mathbb{R}^n$ come sp. vett : $x' = B \cdot x$ con B invert.
- In $\mathbb{R}^n$ come sp. aff. : $x' = B \cdot x + v$ con B invert.
- In $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: $[x'] = [M \cdot x]$ con $\underline{M}$ invert.

Q: quali sono i cambi di coord. in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che mandano la parte all'∞ in se stessa?

A: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times \{1\} \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

punti all'∞ $= \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^n \times \{0\})$.

Data $M = \begin{pmatrix} B & v \\ {}^t w & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n+1)\times(n+1)}$

vogliamo $M \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$, cioè

$$\begin{pmatrix} B & v \\ {}^t w & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ cioè}$$

$${}^t w \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \text{ cioè } \underline{w = 0}$$

Quindi M manda ∞ in ∞ se e solo se

$M = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & c \end{pmatrix}$; vogliamo $\underline{M}$ invert.

$\Rightarrow c \neq 0$; siccome $[M \cdot x] = [\frac{1}{c} \cdot M \cdot x]$

possiamo dividere M per c cioè suppore $c=1$, dunque $M = \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ora l'effetto del cambio di coord. proiettivo sulla parte affine $\mathbb{R}^4 \times \{1\}$ è :

$$\begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \cdot x + v \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo provato :

Prop: i cambiamenti di coord. proiettivi in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che mandano punti a ∞ in punti ∞ sono esattamente i cambi di coord. affini in $\mathbb{R}^n$.

Cioè: "$\mathbb{R}^n$ visto dentro $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è in modo naturale lo spazio affine $\mathbb{R}^n$ (non vettoriale)".

Ci proponiamo di classificare i luoghi in $\mathbb{R}^n$

definiti da equaz. di grado 2 e i luoghi in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ definiti da equaz. omogenee di grado 2:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} \qquad A = \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix}$$

$$\left\{ [x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : {}^t x \cdot A \cdot x = 0 \right\}$$

e metterli in relazione tra loro.

A simmetrica (sempre)

Def: Se $\mathcal{Q} = \{ x \in \mathbb{R}^n : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \}$ è una quadrica in $\mathbb{R}^n$ chiamo:

$$\overline{\mathcal{Q}} = \{ [x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : {}^t x \cdot A \cdot x = 0 \}$$

completamento proiettivo di $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{Q}_\infty = \{ [\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}] : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \}$$
$$= \{ [x] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) : {}^t x \cdot Q \cdot x = 0 \}$$

insieme dei punti all'∞ di $\mathcal{Q}$.

Es: $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3x^2 - 4xy + 5y^2 - 7x + 9y + 1 = 0 \right\}$

$\overline{Q} = \left\{ [x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : 3x^2 - 4xy + 5y^2 - 7xz + 9yz + z^2 = 0 \right\}$

(per $z = 1$ ritrovo la stessa equaz).

$Q_\infty = \left\{ [x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : 3x^2 - 4xy + 5y^2 = 0 \right\}$.

Es: Ellisse $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \right\}$

$\overline{Q} = \left\{ [x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x^2 + y^2 = z^2 \right\}$

$$Q_\infty = \{[x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : x^2+y^2=0\} = \emptyset$$

Parabola $\quad Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \right\}$

$$\overline{Q} = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : yz = x^2\}$$

$$Q_\infty = \{[x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : x^2=0\} = \{[0:1]\}$$

un solo punto: la direz. dell'asse

Iperbole: $Q = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1 \right\}$

$$\overline{Q} = \left\{ [x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : x^2 - y^2 = z^2 \right\}$$

$$Q_\infty = \left\{ [x:y] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : x^2 - y^2 = 0 \right\}$$

$$= \left\{ [1:1] , [1:-1] \right\}$$

due punti: le direzioni degli asintoti.

Esercizi 25/3/14

(9j) $\begin{pmatrix} 2-k & 3k-2 \\ 1 & 2k-1 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 + \lambda_2 = k+1$

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -2k(k-1)$

$= 2k(1-k)$

$$\det = 4k - 2 - 2k^2 + k - 3k + 2 = -2k^2 + 2k$$

$\lambda_1 = 2k$

$\lambda_2 = 1-k$

Se $2k \neq 1-k$, cioè $k \neq 1/3$ allora A è diago;

altrimenti lo è solo se è già diagonale: NO

(k) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & -k \\ 2 & -2 & t-1 \end{pmatrix} =$$

$$= (t-1)^3 + 2(t-1) - 2k(t-1)$$

$$= (t-1)(t^2 - 2t + 1 + 2 - 2k)$$

$$= (t-1)(t^2 - 2t + 3 - 2k)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = 1 \pm \sqrt{1 - 3 + 2k} = 1 \pm \sqrt{2(k-1)}$$

$k > 1$ tre autoval. reali distinti $\Rightarrow$ diag. su $\mathbb{R}$

$k = 1$ autoval 1 triplo $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile

se e solo se è già diagonale: no.

$k < 1$ tre autoval. distinti non reali

$\Rightarrow$ diag. su $\mathbb{C}$ ma non su $\mathbb{R}$.

(l) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 2(k-1) & 1-k \\ -k-4 & 2k-9 & 4-k \\ -2(k+4) & 2(k-7) & 6-k \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-2 & -2(k-1) & k-1 \\ k+4 & t-2k+9 & k-4 \\ 2(k+4) & -2k+14 & t+k-6 \end{pmatrix}$$

(Sarrus: $2\cdot 3\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2$
$+ 2\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 2 + 2\cdot 2\cdot 2$
$=$ troppi termini)

$$= \det \begin{pmatrix} t-2 & -2(k-1) & k-1 \\ k+4 & t-2k+9 & k-4 \\ 0 & -2t+2k-4 & t-k+2 \end{pmatrix} \leftarrow \mathrm{III} - 2\cdot \mathrm{II}$$

$$= \det \begin{pmatrix} t-2 & 0 & k-1 \\ k+4 & t+1 & k-4 \\ 0 & 0 & t-k+2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

$II + 2 \cdot III$

$$= (t+1)(t-2)(t-k+2)$$

$\lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = k-2$

Se $\begin{matrix} k-2 \neq -1 \\ k-2 \neq 2 \end{matrix}$ cioè $\begin{matrix} k \neq 1 \\ k \neq 4 \end{matrix}$ ha autoval. distinti

$\Longrightarrow$ è diago.

$k=1$:
$m.a.(-1) = 2$
$m.a.(2) = 1 \Rightarrow m.g.(2) = 1$

$$m.g.(-1) = 3 - \text{rank}\left(A\big|_{k=1} - (-1)\cdot I_3 \right)$$

$$= 3 - \text{rank}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & -6 & 3 \\ -10 & -12 & 6 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$$

non diago.

$k=4$:
$m.a(-1) = 1 \Rightarrow$ ok
$m.a.(2) = 2$

$$m.g.(2) = 3 - \text{rank}\left(A\Big|_{k=4} - 2\cdot I_3 \right)$$

$$= 3 - \text{rank}\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -8 & -3 & 0 \\ -16 & -6 & 0 \end{pmatrix} = 3-2 = 1$$

Non diago.

(m) $$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} t-k^2 & 2(k-1) & -(k-1) \\ -(k+1) & t+k+2 & -1 \\ -2(k+1) & +4(k+1) & t-k-2 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} t-k^2 & 2(k-1) & -(k-1) \\ -(k+1) & t+k+2 & -1 \\ 0 & -2t+2k & t-k \end{pmatrix}$$

$$= (t-k) \det \begin{pmatrix} t-k^2 & 2(k-1) & -(k-1) \\ -(k+1) & t+k+2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (t-k) \det \begin{pmatrix} t-k^2 & 0 & -(k-1) \\ -(k+1) & t+k & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= (t-k)(t+k)(t-k^2)$$

$\lambda_1 = k, \ \lambda_2 = -k, \ \lambda_3 = k^2$

Se $\begin{cases} k \neq -k \\ k \neq k^2 \\ -k \neq k^2 \end{cases}$ cioè $\begin{cases} k \neq 0 \\ k \neq 1 \\ k \neq -1 \end{cases}$ ho autoval distinti $\Rightarrow$ diago_

$k=0$: autoval 0 triplo $\Rightarrow$ A è diagonalizzabile solo se è già diagonale : No

$k=1$: $m.a.(-1) = 1$ ✓

$m.a.(1) = 2$

$$m.g.(1) = 3 - \text{rank}\left(A\Big|_{k=1} - 1\cdot I_3 \right)$$

$$= 3 - \text{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 4 & -8 & 2 \end{pmatrix} = 3-1 = 2$$

$\Longrightarrow$ diago

$k = -1$ $\qquad m.a.(-1) = 1$ ✓

$\qquad m.a.(1) = 2$

$$m.g.(1) = 3 - \text{rank}\left(A\Big|_{k=-1} - 1\cdot I_3 \right)$$

$$= 3 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 - 1 = 2$$

$\Rightarrow$ diago —

(h) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3k \\ 1 & 0 & 3k & 1 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} t-1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & t-2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & t-1 & -3k \\ -1 & 0 & -3k & t-1 \end{pmatrix}$$

$$= (t-1)(t-2)(t^2-2t+1-9k^2)$$

$$\lambda_1 = 1 \quad , \quad \lambda_2 = 2 \quad , \quad \lambda_{3,4} = 1 \pm \sqrt{1-1+9k^2} = 1 \pm 3k$$

Se $1 \pm 3k \neq 1$, $1 \pm 3k \neq 2$, $1+3k \neq 1-3k$ cioè $k \neq 0$, $k \neq \pm 1/3$ allora autoval distinti $\Longrightarrow$ diago.

$k = 0$ $\quad$ m.a. $(2) = 1$ ✓

$$m.a.(1) = \underline{3}$$

$$m.g.(1) = 4 - \operatorname{rank}\left(A\Big|_{k=0} - 1 \cdot I_4 \right)$$

$$= 4 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 2 = \underline{2}$$

non diago

$k = \pm 1/3$ $\quad m.a.(1) = 1 \quad m.a.(\underbrace{1 \mp 3k}_{=0}) = 1$

$m.a.(2) = 2$

$$m.g.(2) = 4 - \operatorname{rank}\left(A\big|_{k=\pm 1/3} - 2\cdot I_4 \right)$$

$$= 4 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & \pm 1 \\ 1 & 0 & \pm 1 & -1 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1$$

non diago