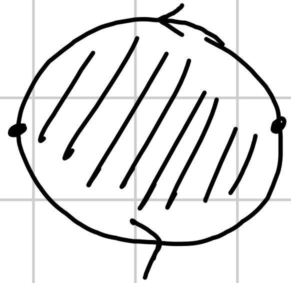
Geometria, 16/4/14

Esercitazione extra: 29/4, 14-15:30, A21.

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \big/ \sim \qquad x \sim y \text{ se } y = \lambda \cdot x$$

$= $ l'insieme delle rette in $\mathbb{R}^{n+1}$.

<u>Fatto</u>: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) =$

$=$  $= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| \leq 1\right\} \Big/ {\scriptstyle x = -x \text{ se } \|x\| = 1}$

Analogamente: $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \left\{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\right\} \Big/ {\scriptstyle x \sim -x}$

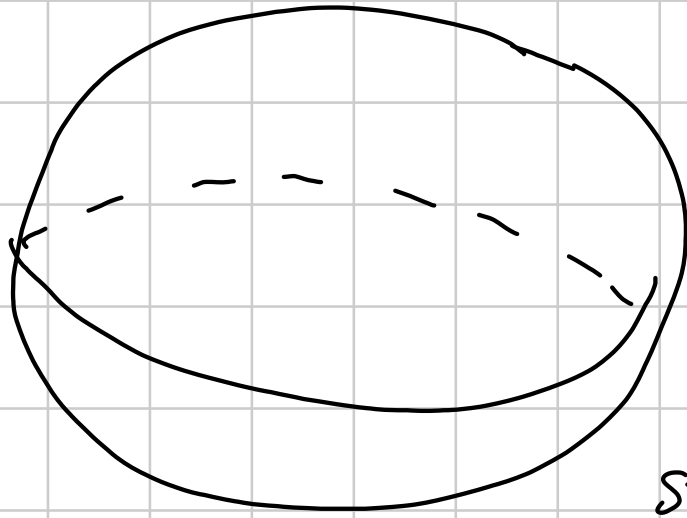
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1 ,\ x_4 \geq 0\right\} \Big/ {\scriptstyle x \sim -x \text{ se } x_4 = 0}$$

(proiettando su $x_4 = 0$)

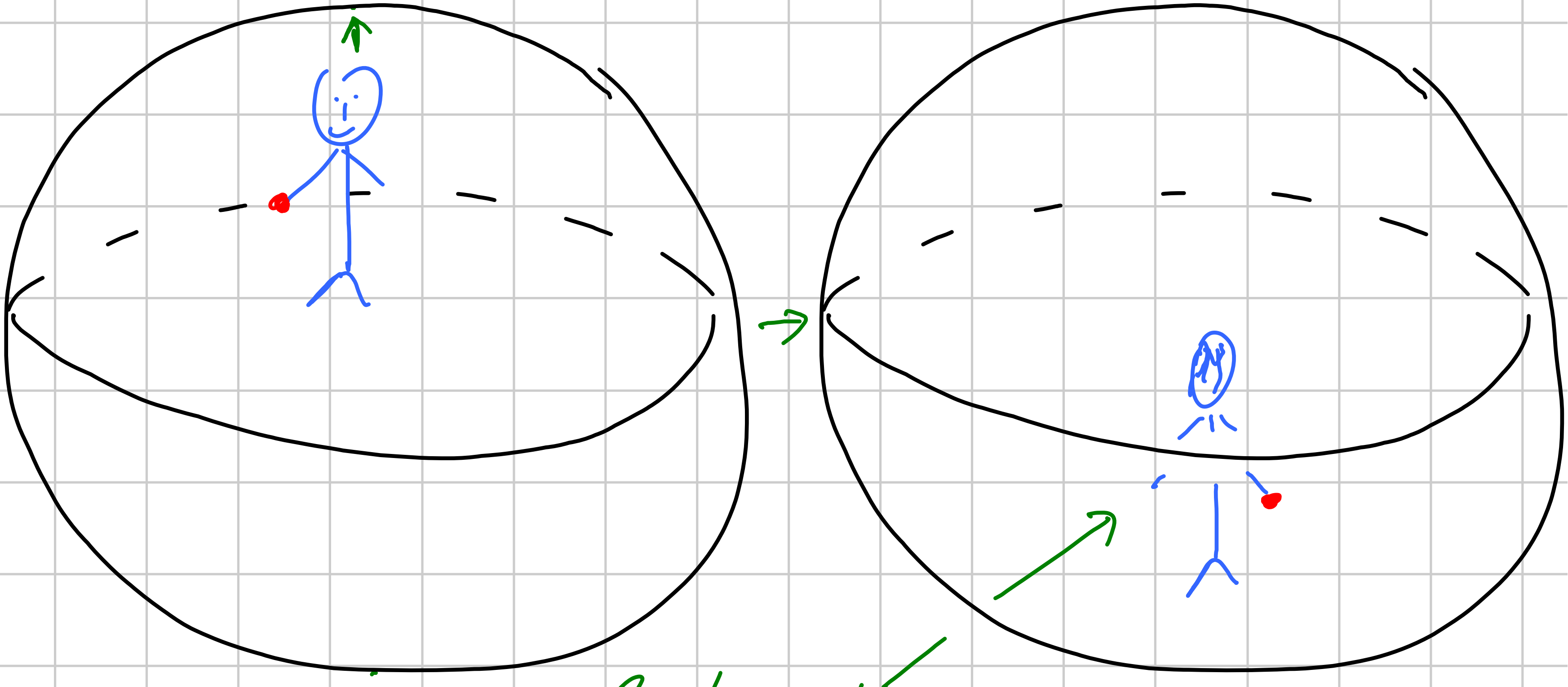
$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \le 1 \right\} \Big/ \begin{matrix} x = -x \\ \text{se } \|x\| = 1 \end{matrix}$$

$$\left(\Rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \le 1 \right\} \Big/ \begin{matrix} x = -x \\ \text{se } \|x\| = 1 \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) =$$



palla 3D piena con punti opposti sul bordo identificati

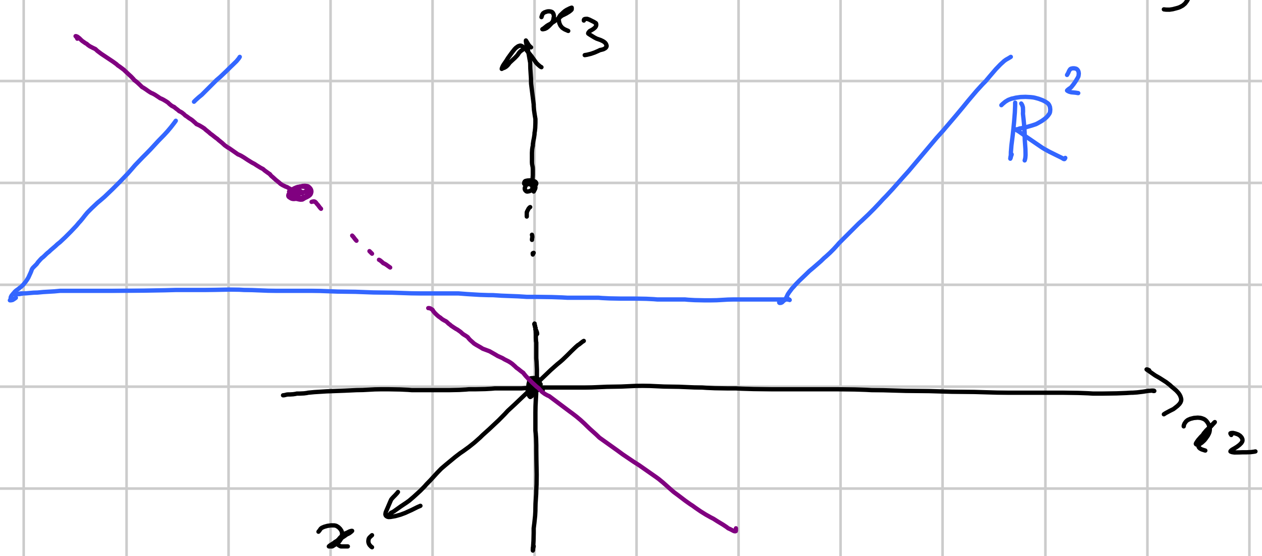


lo stesso di prima con rotaz. oraria di 180°

Visto: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

Analogamente: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ = rette per O in $\mathbb{R}^3$.

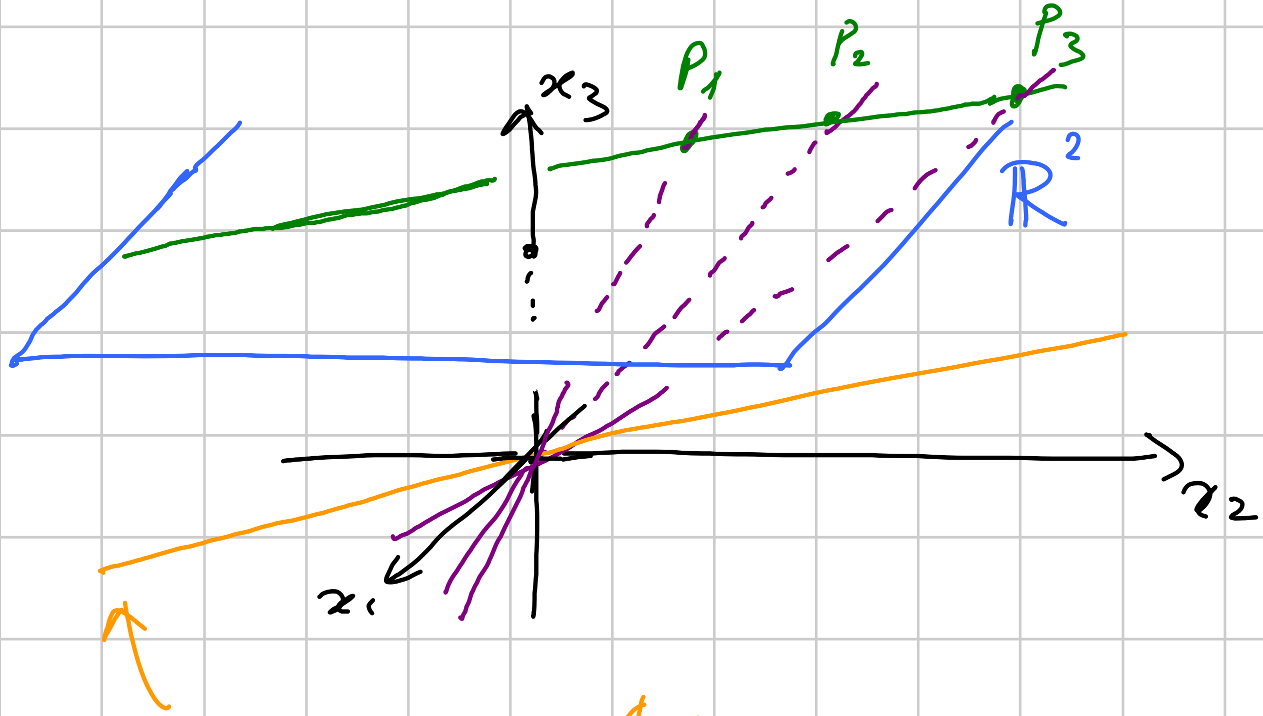
Identifico $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^2 \times \{1\} = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$



$\mathbb{R}^2$ incontra tutte le rette di $\mathbb{R}^3$ in un solo punto tranne quelle orizzontali (cioè contenute in $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$)

$$\Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}_{}$$

"l'insieme dei punti all'∞ di $\mathbb{R}^2$"



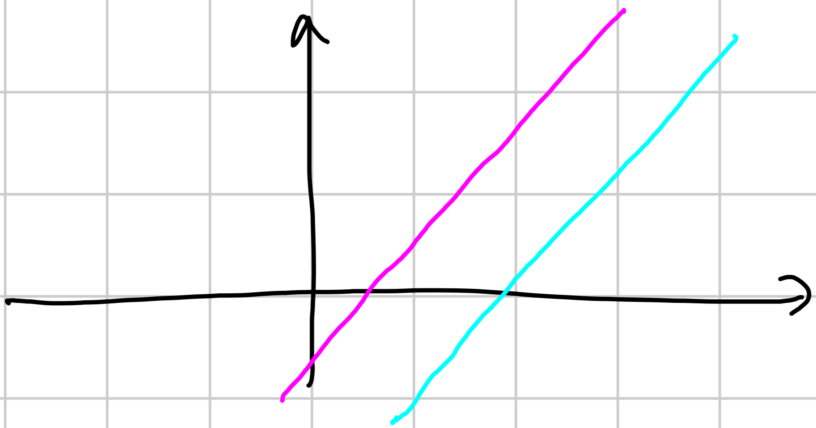
un punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$

Il punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ rappresentato da P_i si avvicina a $\bullet \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ man mano che P_i si allontana

$$\Rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}$$

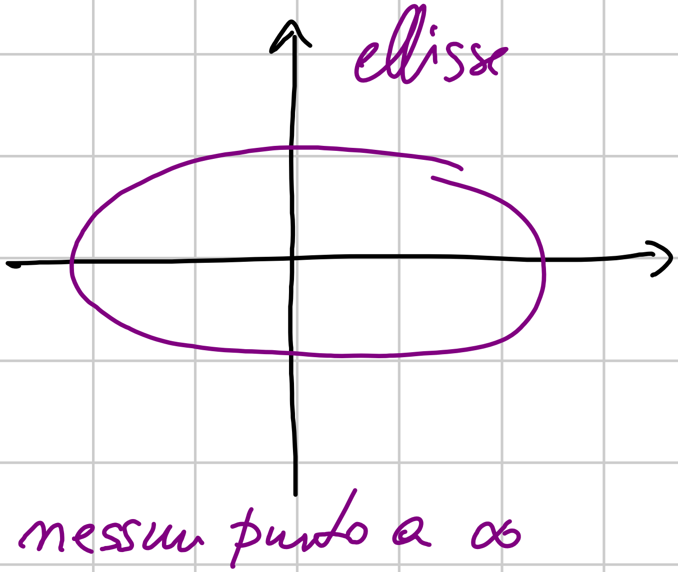
punti all'infinito = le direzioni delle rette affini in $\mathbb{R}^2$.

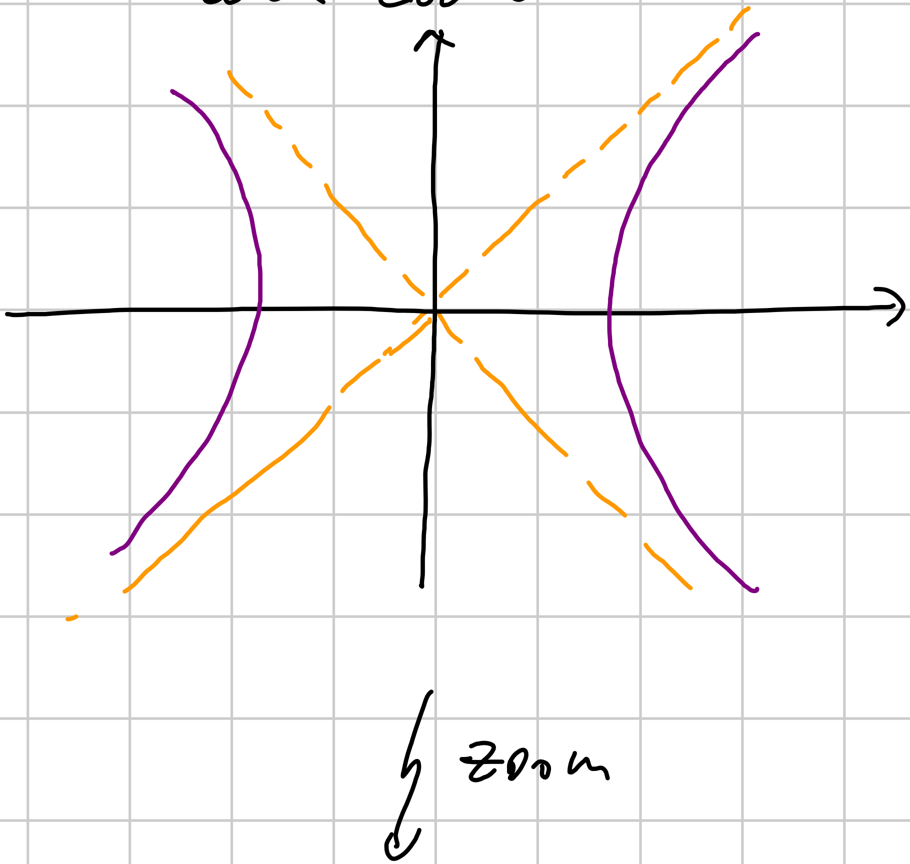
(Nota:



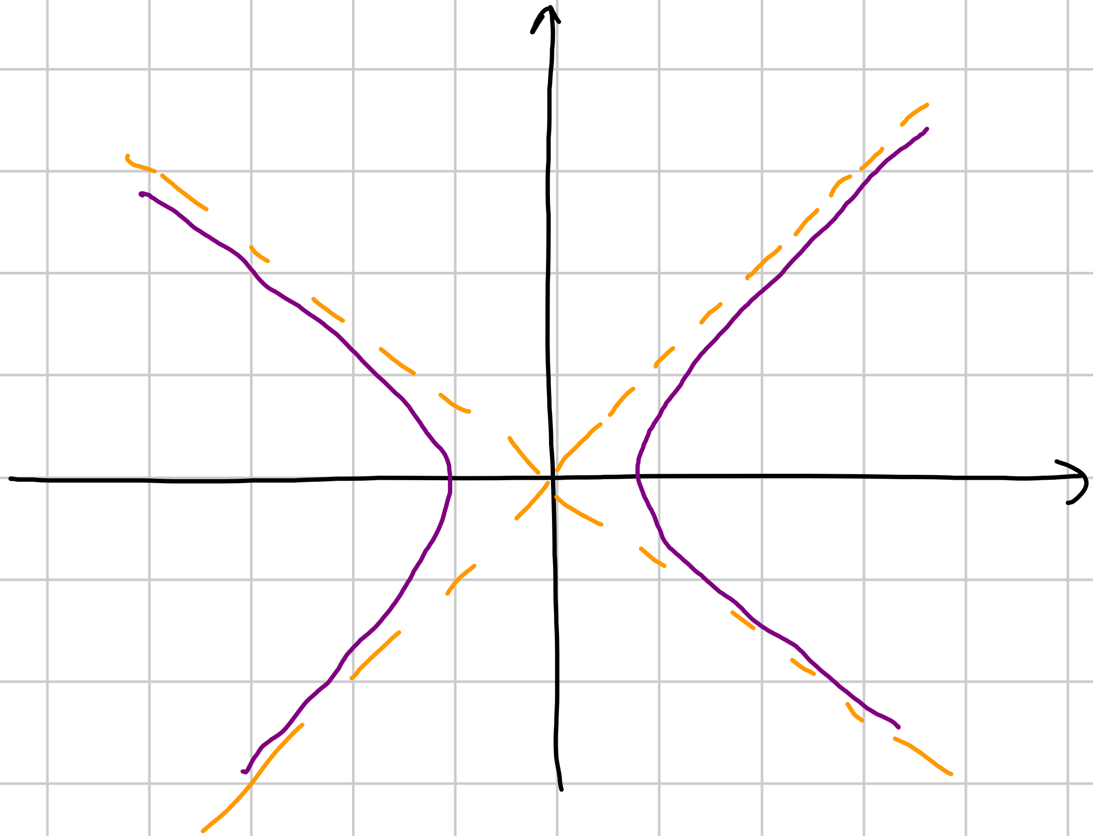
rappresentano lo stesso punto di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ dunque hanno lo stesso punto a ∞).

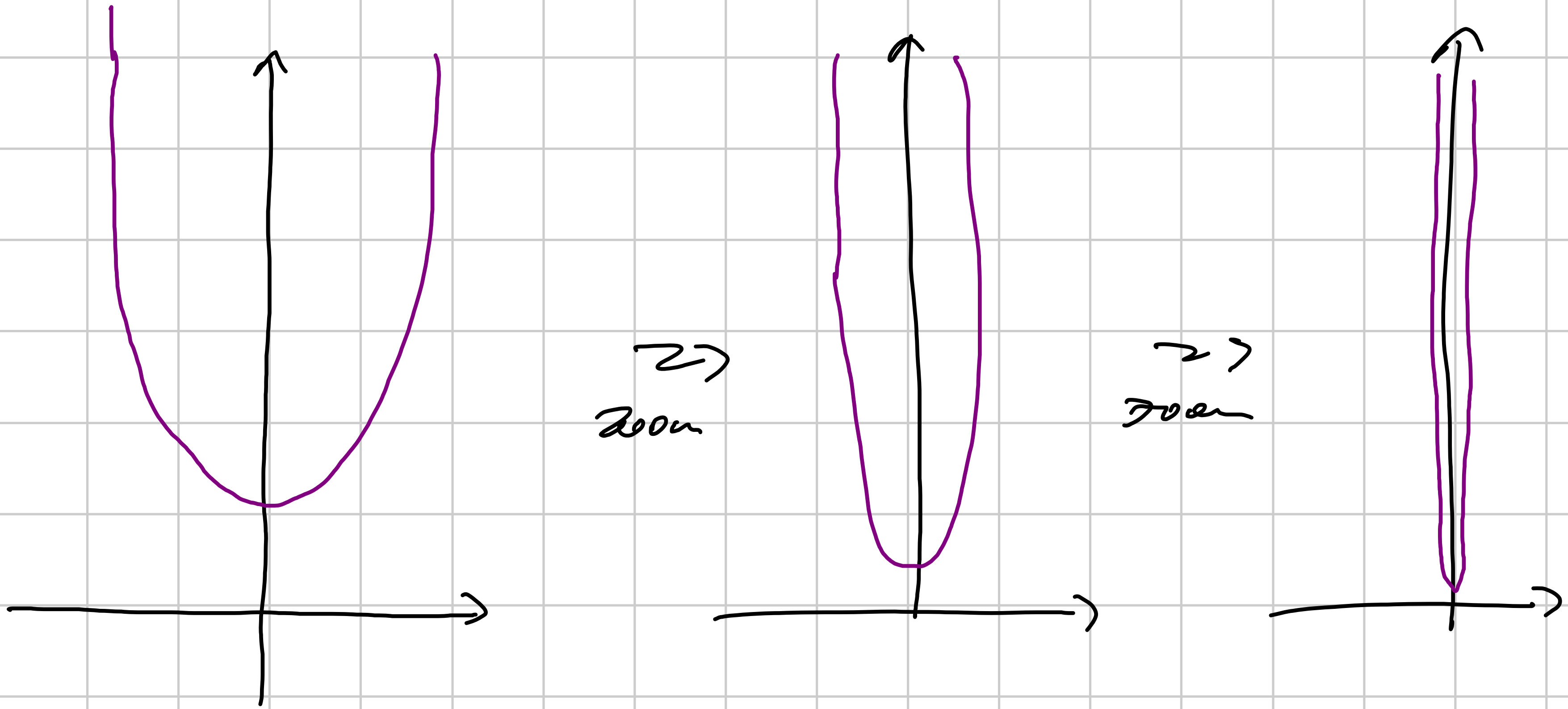
Esempio: "Punti all'∞ delle coniche"





$\Rightarrow$ l'iperbole ha come punti all'∞ le direz. dei suoi asintoti.





$\Rightarrow$ la parabola va all'∞ in una sola direzione, quella del suo asse.

Ripeto: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}_{\text{punti a } \infty \text{ di } \mathbb{R}^2}$

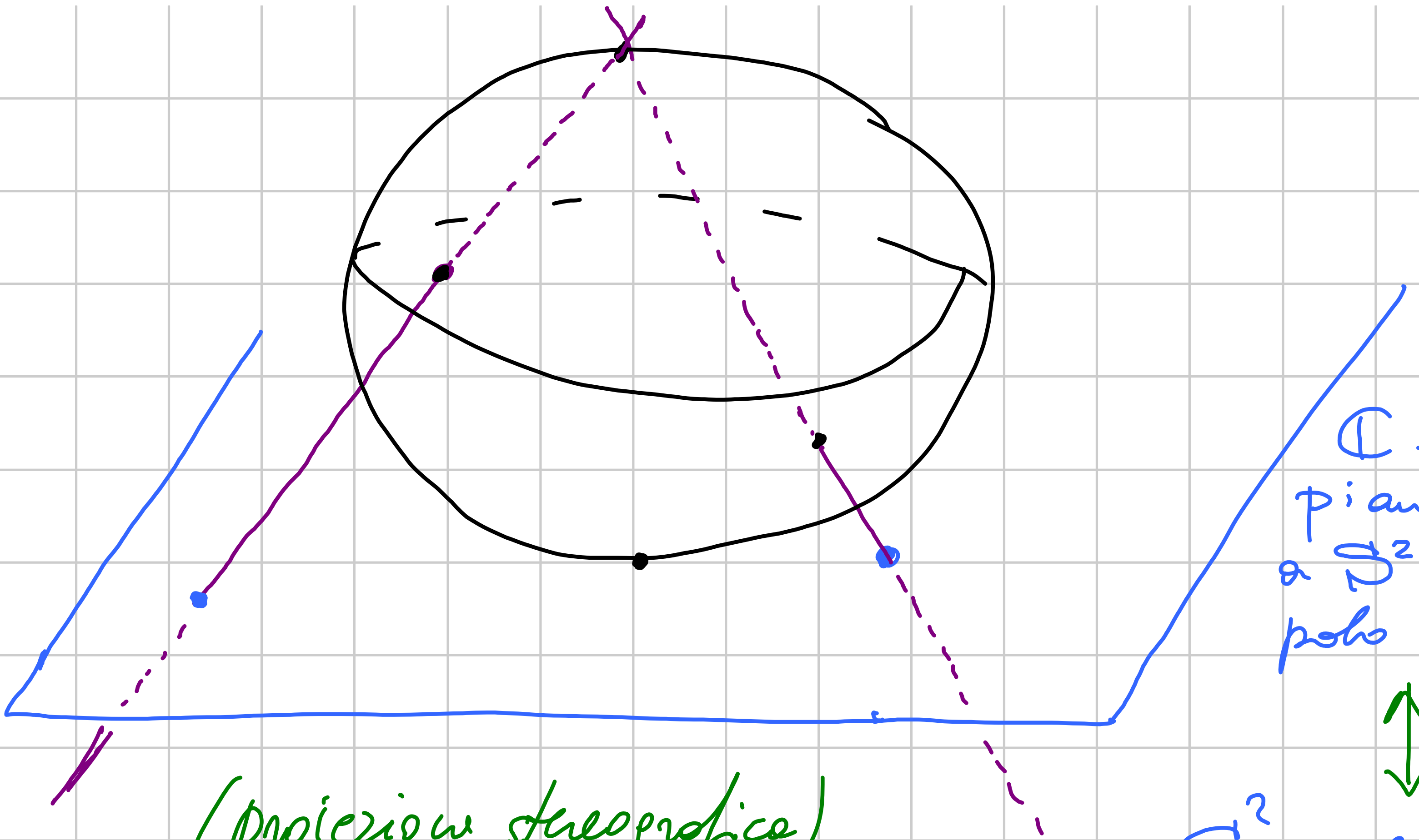
= direzioni delle rette affini

Analog: $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^3 \cup \underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_{\text{punti a } \infty \text{ di } \mathbb{R}^3}$

= direzioni delle rette affini.

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \text{le rette in } \mathbb{C}^2$$
$$= \left(\mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \{1\}\right) \cup \{\infty = [\mathbb{C} \times \{0\}]\}$$
$$= \mathbb{C} \cup \infty .$$

Si identifica in modo naturale a
$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\} .$$



$\mathbb{C}$ = piano tg a S^2 nel polo sud

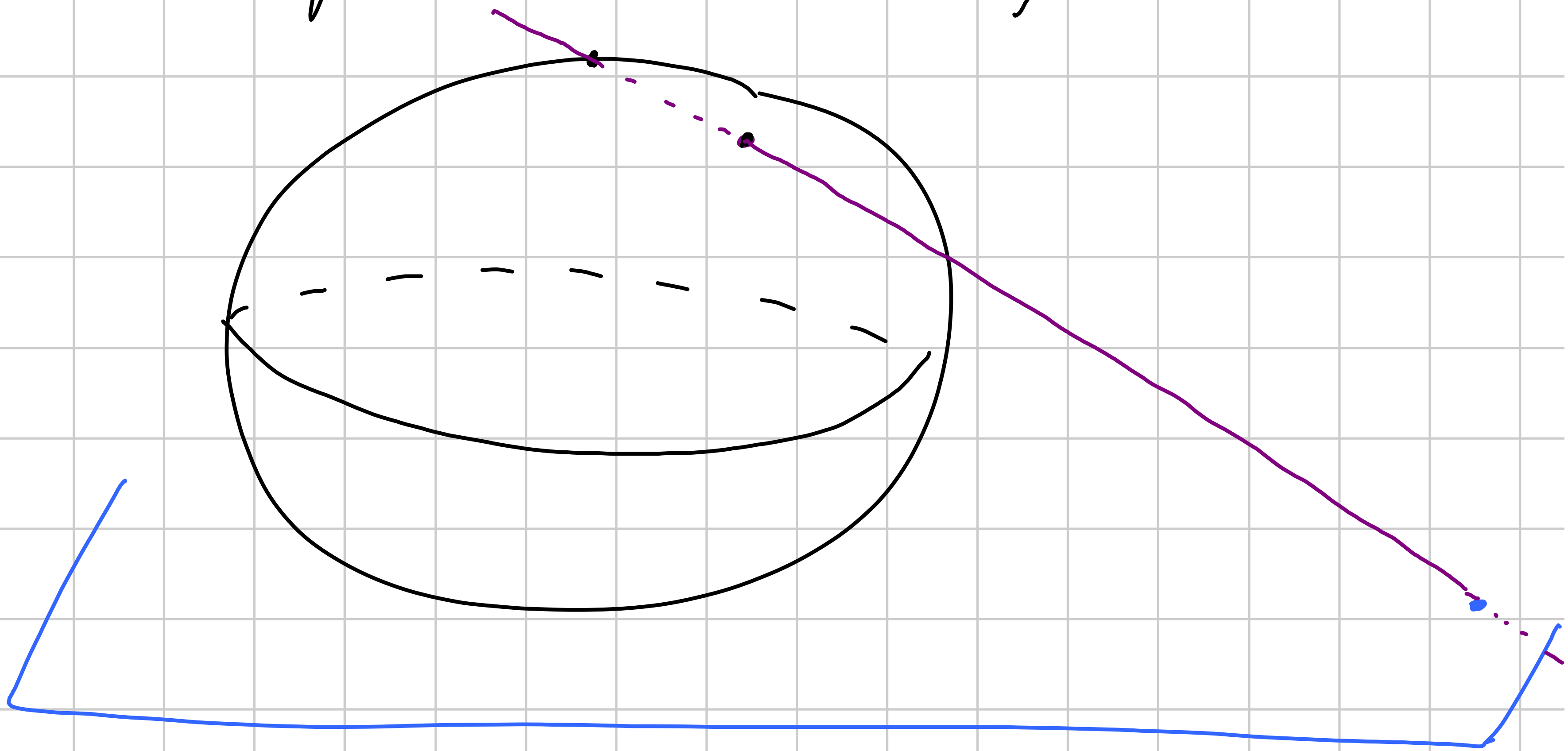
$$\updownarrow$$

$S^2 \setminus$ polo nord

(proiezione stereografica)

$$\Longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longleftrightarrow S^2$$

inoltre il polo nord davvero è ∞ per $\mathbb{C}$:



Esercizi 25/3/14.

(8) Trovare autoval e base che diagonalizza

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 5 & 92 \\ -30 & -7 & -144 \\ -3 & -1 & -11 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det(t \cdot I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} t-20 & -5 & -92 \\ 30 & t+7 & 144 \\ 3 & 1 & t+11 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} t-5 & -5 & 5t-37 \\ -3t+9 & t+7 & -t^2-18t+67 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{I} - 3\cdot\mathrm{II} \qquad\qquad \mathrm{III} - (t+11)\cdot\mathrm{II}$$

$$= (t-5)(t^2+18t-67) + (-3t+9)(5t-37)$$

$$= t^3 + 18t^2 - 67t$$

$$- 5t^2 - 90t + 335$$

$$- 15t^2 + 111t - 333 = t^3 - 2t^2 - t + 2$$

$$+45t$$

$$= (t-2)(t^2-1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = -1 \quad -$$

(tre radici reali distinte $\Rightarrow A$ diago su $\mathbb{R}$)

$$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \quad A \cdot v_1 = 2 \cdot v_1 : \quad \begin{cases} 20x + 5y + 92z = 2x \\ -30x - 7y - 144z = 2y \\ -3x - y - 11z = 2z \end{cases}$$

(So già che ho soluz $\neq 0 \Rightarrow$ equazioni lin. dip. $\Rightarrow$ ne butto una)

$$\begin{cases} 18x + 5y + 92z = 0 \\ 3x + y + 13z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{pmatrix} 65-92 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -9 \\ 14 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Analog. $r_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 12 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(9) Discutere diagonalizzabilità su $\mathbb{R}/\mathbb{C}$.

(e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad p_A(t) = (t-1)(t^2 - 6t + 5)$
$$= (t-1)^2 (t-5)$$

$\lambda_1 = 5 \quad m.a.(5) = 1 \implies m.g.(5) = 1$

$\lambda_2 = 1 \quad m.a.(1) = 2$;

$$m.g.(1) = \dim(\operatorname{Ker}(1 \cdot I_3 - A))$$

$$= 3 - \operatorname{rank}(I_3 - A) = 3 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= 3 - 1 = 2$$

$\Longrightarrow$ A diago sur $\mathbb{R}$.

(f) $\begin{pmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & 0 & 0 & \boxed{2} \end{pmatrix}$

Simmetrica $\Rightarrow$ diago rie ortog.

Riordinando le coordinate (coniugio) la A diventa

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & -1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ -1 & 2 & & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & 3 \\ & & 3 & 1 \end{array}\right)$$

$$p_A(t) = (t^2-4t+3)(t^2-2t-8)$$

$$= (t-1)(t-3)(t-4)(t+2)$$

$$\lambda_{1,2,3,4} = -2, 1, 3, 4$$

distinti $\Rightarrow$ è diago su $\mathbb{R}$ (lo sapevo).

Trovando gli autovettori $\lambda_{1,2,3,4}$ si ottiene che essi sono automaticamente una base ortogonale.

attenzione

(g) $$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} t+1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & t & 0 & -3/2 \\ 10 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & t \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & t & 0 & -3/2 \\ t^2+9 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & t \end{pmatrix}$$

$$= (t^2+9)(t^2+3) \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 3i$$

$$\lambda_{3,4} = \pm i\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ non diago su $\mathbb{R}$ (non tutte le radici di $p_A(t)$ sono reali, anzi' hanno)

ma è diago su $\mathbb{C}$ (radici distinte) —

(h) $A = \begin{pmatrix} \boxed{-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

triang. inf. a blocchi e ogni blocco è triang. sup

(e anche $t \cdot I - A$) $\Longrightarrow$

$$p_A(t) = (t-2)^3 \cdot (t+3)^2$$

$\lambda_1 = 2 \qquad m.a.(2) = 3 \qquad (\Longrightarrow 1 \leq m.g.(2) \leq 3)$

$\lambda_2 = -3 \qquad m.a.(-3) = 2 \qquad (\Longrightarrow 1 \leq m.g.(-3) \leq 2)$

$$m.g.(2) = \dim(\ker(2 \cdot I_5 - A))$$

$$= 5 - \operatorname{rank}(A - 2I_5) =$$

$$= 5 - \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$= 5 - 3 = 2$ ($\Rightarrow$ A non diago)

$$m.g.(-3) = 5 - \operatorname{rank}(3I + A) = \cdots = 5 - 4 = 1$$

(i) $A = \begin{pmatrix} 2k-1 & 2-k \\ 2k+1 & -k \end{pmatrix}$

So che $p_A(t) = t^2 - tr(A) \cdot t + det(A)$

$$\begin{pmatrix} \cancel{-2k^2} + k \\ -4k \cancel{+2k^2} \\ -2 + k \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ le radici $\lambda_{1,2}$ hanno

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = tr(A) \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = det(A) \end{cases}$$

Per noi: $\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = k-1 \\ \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -2(k+1) \end{cases}$

$\Longrightarrow \quad \lambda_1 = -2$

$\lambda_2 = k+1$.

Se $k+1 \neq -2$ (cioè $k \neq -3$)

ho autoval distinti $\Longrightarrow$ è diago.

Se $k+1 = -2$ cioè $k = -3$ ho una 2×2

con un solo autoval. $\Longrightarrow$ può essere

diagonalizzabile solo se è già diagonale,

e ciò non è vero:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

<u>Noto</u>: per $k \neq -3$ avrò autovettori

v_1 rel. a $\lambda_1 = -2$

v_2 rel. a $\lambda_2 = k+1$

$$v_1 : \begin{cases} (2k-1)x + (2-k)y = -2x \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$v_2 : \begin{cases} (2k-1)x + (2-k)y = (k+1)x \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

$$r_1 : \begin{cases} (2k+1)x + (2-k)y = 0 \\ \text{\_\_\_\_\_\_\_\_} \end{cases} \qquad r_1 = \begin{pmatrix} k-2 \\ 2k+1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 : \begin{cases} (k-2)x + (2-k)y = 0 \\ \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} \end{cases} \qquad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per $k = -3$ essi restano autovettori di A

$r_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ma non sono lin. indip.