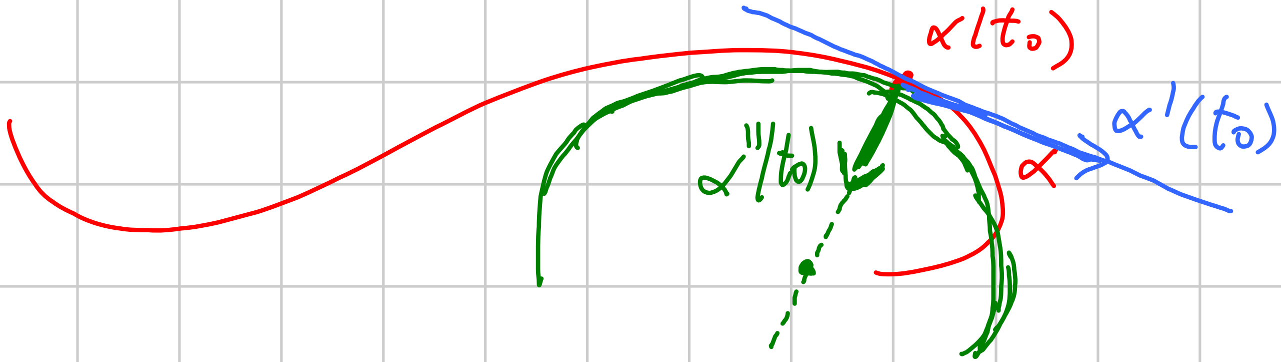
Geometria 15/5/14

$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ curva in p.d'a. $(\|\alpha'\| \equiv 1)$

Cerchiamo la circonferenza con triplice contatto con α in $\alpha(t_0)$ (osculatrice).

Visto: $\|\alpha'\| \equiv 1 \implies \alpha'' \perp \alpha'$.



Centro: nella direz. di $\alpha''(t_0)$ (a partire da $\alpha(t_0)$).

Resta da trovare il raggio.

Supponiamo che il centro sia (a,b) e il raggio r.

Vogliamo $d(t) =$ dist. tra $\alpha(t)$ e circonf. di centro (a,b) e raggio r

$$d(t_0) = 0, \quad d'(t_0) = 0, \quad d''(t_0) = 0.$$

Ora $$d(t) = \left| \sqrt{(X(t) - a)^2 + (Y(t) - b)^2} - r \right|$$

E' equivalente togliere il valore assoluto:

$$d(t_0) = \sqrt{(X_0-a)^2+(Y_0-b)^2} - r$$

$$d'(t) = \frac{(X(t)-a)\cdot X'(t) + (Y(t)-b)\cdot Y'(t)}{\sqrt{}}$$

$$d''(t) = \frac{X'(t)^2 + (X(t)-a)\cdot X''(t) + Y'(t)^2 + (Y(t)-b)\cdot Y''(t)}{\sqrt{}} - \frac{\left((X(t)-a)X'(t) + (Y(t)-b)\cdot Y'(t)\right)^2}{\left(\sqrt{}\right)^3}$$

$$\begin{cases} r = \sqrt{(X_0-a)^2+(Y_0-b)^2} \\ (X_0-a)X_0' + (Y_0-b)Y_0' = 0 \\ (X_0-a)X_0'' + (Y_0-b)Y_0'' = -1 \end{cases}$$

$$X_0 - a = \frac{Y_0'}{X_0' \cdot Y_0'' - Y_0' \cdot X_0''} \qquad Y_0 - b = \frac{X_0'}{Y_0' \cdot X_0'' - X_0' \cdot Y_0''}$$

$$r = \frac{\sqrt{(X_0')^2+(Y_0')^2}}{|X_0' Y_0'' - Y_0' \cdot X_0''|} = \frac{1}{|X_0' \cdot Y_0'' - Y_0' \cdot X_0''|} =$$

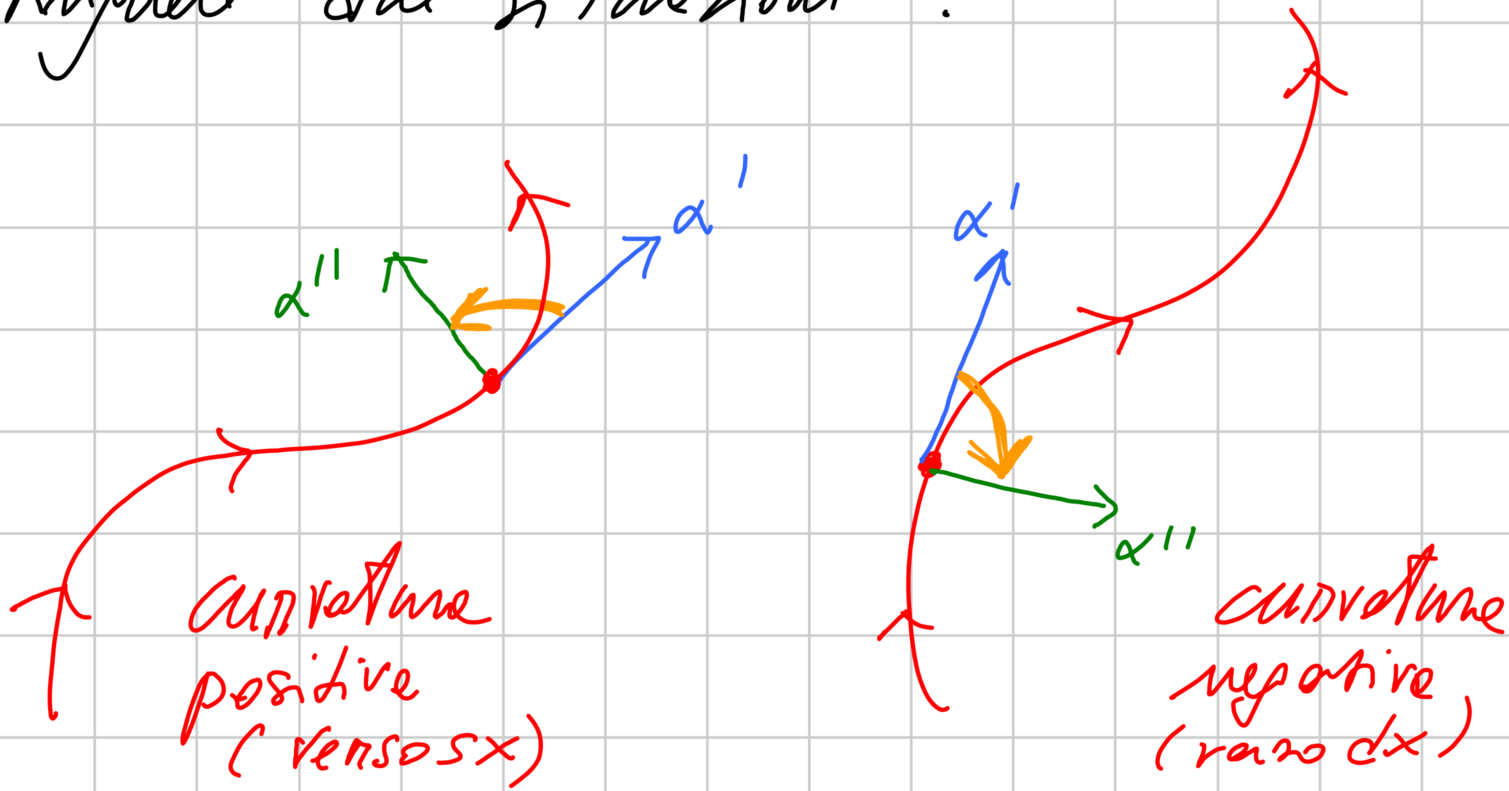
So che $\begin{pmatrix} X_0'' \\ Y_0'' \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} X_0' \\ Y_0' \end{pmatrix}$ e $\left\| \begin{pmatrix} X_0' \\ Y_0' \end{pmatrix} \right\| = 1$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} X_0' \\ Y_0' \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{\sqrt{X_0''^2 + Y_0''^2}} \cdot \begin{pmatrix} -Y_0'' \\ X_0'' \end{pmatrix}$$

Sostituendo trovo $r = \dfrac{1}{\sqrt{X_0''^2 + Y_0''^2}} = \dfrac{1}{\|\alpha''(t_0)\|}$.

<u>Def</u>: la curvatura di α in $\alpha(t_0)$ è il reciproco del raggio della circonf. osculatrice cioè $\kappa = \|\alpha''(t_0)\|$ (se α è in p.d'a.)

Sia α orientata: allora possiamo distinguere due situazioni:



$\Rightarrow$ posso dare un segno a k.

Consideriamo β non in p.d'a. : so che esiste cambio parametro σ t.c.

$$\alpha = \beta \circ \sigma \quad \text{è in p.d'a.}$$

$\Rightarrow$ la curvatura di β in s sarà la curvatura di α in $\sigma^{-1}(s)$. Ciò consente il calcolo perché σ è l'inversa di

$$t \longmapsto \int_c^t \|\beta'(u)\| du .$$

Farlo caso per caso è difficile. Formula:

curvatura di β in $\beta(t)$

$$= \frac{\det\left(\beta'(t), \beta''(t)\right)}{\|\beta'(t)\|^3}$$

(si applica direttamente senza riparametrizzare).

<u>Oss</u>: contiene già il segno.

__Es:__ $\beta(s) = \begin{pmatrix} \log(1+s) + 3s^2 \\ \cos(s) + 2s - 5s^2 \end{pmatrix}$

curvature in $\beta(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\beta'(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{1+s} + 6s \\ -\sin(s) + 2 - 10s \end{pmatrix} \qquad \beta''(s) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{(1+s)^2} + 6 \\ -\cos(s) - 10 \end{pmatrix}$$

$$\beta'(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \beta''(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -11 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\|^3} = -\frac{21}{5\sqrt{5}} .$$

Verifico (almeno) che la formula dà lo stesso valore della curvatura se cambio parametrizzazione con $\gamma(s) = \beta(k \cdot s)$:

$$\Rightarrow \gamma'(s) = k \cdot \beta'(ks)$$

$$\Rightarrow \gamma''(s) = k^2 \cdot \beta''(ks)$$

$$\Rightarrow \frac{\det(\gamma'(s), \gamma''(s))}{\|\gamma'(s)\|^3} = \frac{\det(\cancel{k} \cdot \beta'(ks), \cancel{k^2} \cdot \beta''(ks))}{\|\cancel{k} \cdot \beta'(ks)\|^3}$$

$$= \frac{\det(\beta'(ks), \beta''(ks))}{\|\beta'(ks)\|^3}.$$

Prop: dati nel piano un punto P_0 e un vettore v_0 unitario e $k : [0,L] \to \mathbb{R}$ esiste una e una sola curva $\alpha : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ in p.d'a. t.c. $\alpha(0) = P_0$, $\alpha'(0) = v_0$ e α ha curvatura $k(t)$ in $\alpha(t)$ $\forall t$.

Cioè: se dico
- dove partire
- in quale direzione partire
- quanto curvare in ogni istante

allora il percorso è determinato

——— o ———

Curve nello spazio.

$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ curva in p. d'a. $\|\alpha'\| \equiv 1$.

Prop: Se $\alpha''(s_0) \neq 0$ allora esiste uno e un solo piano (detto osculatore) con cui α ha triplice contatto, ed è quello generato da $\alpha'(s_0)$, $\alpha''(s_0)$ - Inoltre su tale piano esiste una e una sola circonf (detta osculatrice) con cui α ha triplice contatto, che ha raggio $\frac{1}{\|\alpha''(s_0)\|}$.

<u>Def</u>: curvatura di α in $\alpha(s_0)$ è

$$\kappa = \|\alpha''(s_0)\|.$$

= "misura numerica di quanto non è dritta".

Concludiamo: misura di quanto α non è piana.

Definiamo per α nel punto $\alpha(t)$ una base ortonormale positiva di $\mathbb{R}^3$ detta riferimento di Frénet (per α in p.d'a.):

$t(s) = \alpha'(s)$ vettore tangente

$n(s) = \alpha''(s) / \|\alpha''(s)\|$ vettore normale (so già che $n \perp t$)

generano il piano osculatore

$b(s) = t(s) \wedge n(s)$ vettore binormale

$\Rightarrow$ il piano osculatore ha giacitura $(b(s))^{\perp}$

$\Rightarrow$ la misura della non planarità di α
è la variazione della giacitura del
piano osculatore $\Rightarrow$ è $b'(s)$ _

Teo: esiste una funzione $\tau : [0,L] \to \mathbb{R}$
t.c. $b'(s) = -\tau(s) \cdot n(s)$ _ Inoltre
$t'(s) = \kappa(s) \cdot n(s)$ e
$n'(s) = -\kappa(s) \cdot t(s) + \tau(s) \cdot b(s)$, ovvero

$$\left(t(s), n(s), b(s)\right)' = \left(t(s), n(s), b(s)\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) & 0 \\ \kappa(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

Def: chiameremo $\tau(s)$ la torsione di α in $\alpha(s)$ (misura non planarità)

Dim: $\underbrace{b = t \wedge n}_{\Downarrow}$, $\underbrace{\|b\| = 1}_{\Downarrow}$

$$b' = t \wedge n' + \underbrace{\underset{\underset{(\alpha')'}{\parallel}}{t'} \wedge \underset{\underset{\alpha''/\|\alpha''\|}{\parallel}}{n}}_{0} \qquad b' \perp b$$

$$\Downarrow$$

$$b' \perp t$$

$\Rightarrow$ b' multiplo di n

$\Rightarrow b' = -\tau \cdot n$

$$t' = (\alpha')' = \alpha'' = \underbrace{\|\alpha''\|}_{\kappa} \cdot \underbrace{\frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}}_{n}$$

$$n = b \wedge t \Longrightarrow n' = \underbrace{b'}_{-\tau \cdot n} \wedge t + b \wedge \underbrace{t'}_{\kappa \cdot n}$$

$$= \tau \cdot b - \kappa \cdot t .$$

$\boxed{///}$

<u>Oss</u>: se $M : [a,b] \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$

è sempre ortogonale $\Longrightarrow M' = M \cdot A$

con A antisimmetrica.

Infatti: ${}^tM \cdot M = I_n$

derivo $\underbrace{{}^tM' \cdot M}_{{}^tA} + \underbrace{{}^tM \cdot M'}_{A} = 0$

$\Rightarrow A$ antisimm

$M' = M \cdot A$.

Partendo da questo si verifica che la parte antisimmetrica del tensore degli sforzi dà luogo a un movimento rigido.

Come calcolare rif. di Frénet, curvatura e torsione per β non in p.d'a.

In teoria: si trova $\alpha = \beta \circ \sigma$ in p.d'a.
e si ragiona per α. (Non pratico.)

Rif. Frénet: ① $t = \beta' / \|\beta'\|$

$$n = \frac{\beta'' - \langle \beta'' | t \rangle \cdot t}{\| \beta'' - \langle \beta'' | t \rangle \cdot t \|}$$

ortonormalizzo β', β''
(chiedo: β'' lin. indip. da β')

$$b = t \wedge n$$

2) $t = \beta' / \|\beta'\|$ $\qquad b = \dfrac{\beta' \wedge \beta''}{\|\beta' \wedge \beta''\|}$ $\qquad n = b \wedge t$

Curvatura e torsione:

$$\kappa = \frac{\|\beta' \wedge \beta''\|}{\|\beta'\|^3} \qquad \tau = \frac{\langle \beta' \wedge \beta'' \mid \beta''' \rangle}{\|\beta' \wedge \beta''\|^2}$$

Verifico solo che il valore non cambia riparametrizzando

$\gamma(s) = \beta(\lambda \cdot s) \qquad \gamma' = \lambda \cdot \beta' \qquad \gamma'' = \lambda^2 \cdot \beta'' \qquad \gamma''' = \lambda^3 \cdot \beta'''$

$$\frac{\gamma' \wedge \gamma''}{\|\gamma'\|^3} = \frac{\cancel{\lambda} \cdot \beta' \wedge \cancel{\lambda^2} \cdot \beta''}{\cancel{\lambda^3}\|\beta'\|^3} \qquad \frac{\langle \gamma' \wedge \gamma'' | \gamma''' \rangle}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2} = \frac{\langle \cancel{\lambda}\beta' \wedge \cancel{\lambda^2}\beta'' | \cancel{\lambda^3}\beta''' \rangle}{\|\cancel{\lambda}\beta' \wedge \cancel{\lambda^2}\beta''\|^2}.$$

Ese spazi proiettivi 18/4 - II.

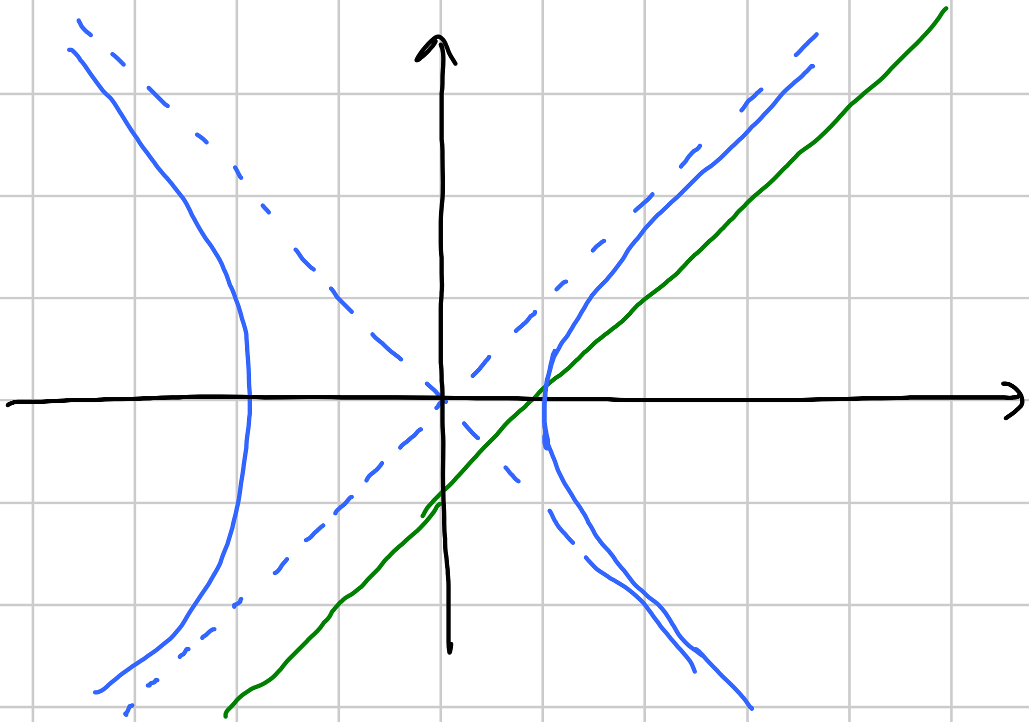
(4) Punti a ∞ di $x^3 + y^3 - xy^2 - x^2 + y^2 - x + y + 1 = 0$.

L'equazione si riscrive come $\underline{(x-y-1)}\,\underline{(x^2-y^2-1)} = 0$.

Punti a ∞:

$[1:1]$

$[1:-1]$



⑤ Trovare $X \subset \mathbb{R}^2$ def. da eq. terzo grado con 3 pti a ∞ che non contiene rette.

$x \cdot y \cdot (x+y) = 0$

$[1:0]$ $[0:1]$ $[1:-1]$

$x \cdot y \cdot (x+y) = 1$

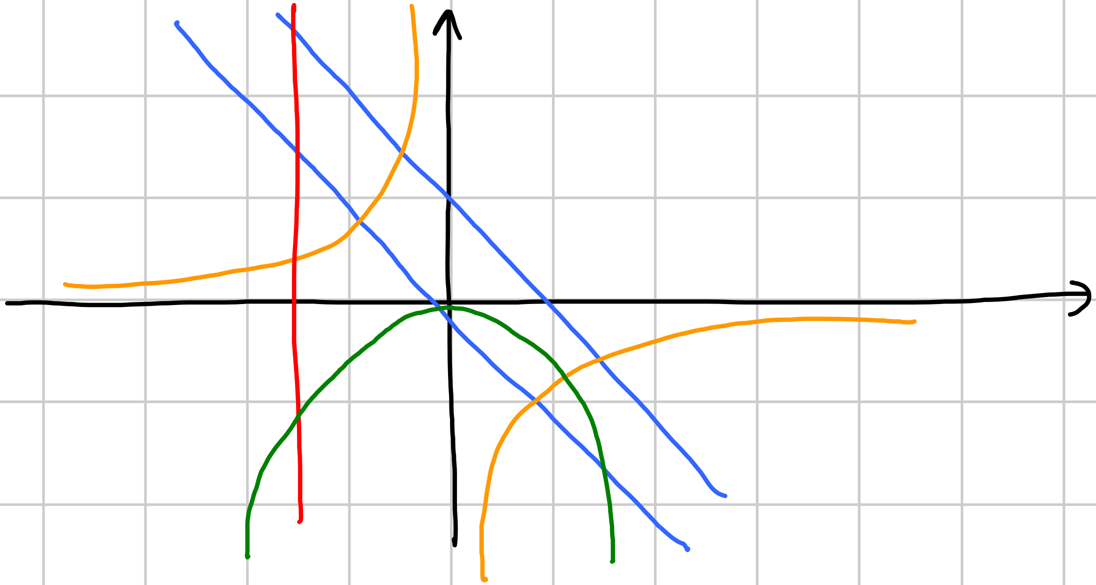
stessi punti a ∞

⑥ Trovare pti a ∞ di $\left\{ \binom{x}{y} : (x+y-(x+y)^2)(xy+1)(x-\sqrt{\pi})(x^2+17y) = 0 \right\}$

$[1:-1]$

$[1:0]$

$[0:1]$



(7) Trovare almeno un punto di intersez tra

$$A = \{[t-1 : t^2-4 : -t] : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$

$$B = \{[1-3t^2 : 1+t : 1+3t^2] : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})\_$$

Attenzione: i due "t" nelle due definizioni degli insiemi non sono lo stesso, infatti

$A = \{ [\lambda - 1 : \lambda^2 - 4 : -\lambda] : \lambda \in \mathbb{R} \}$

$B = \{ [1 - 3\varphi^2 : 1 + \varphi : 1 + 3\varphi^2] : \varphi \in \mathbb{R} \}$ _

Cerco valori di t e s per i quali

$$[t-1 : t^2 - 4 : -t] = [1 - 3s^2 : 1 + s : 1 + 3s^2]$$

cioè tali che $\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-4 \\ -t \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1-3s^2 \\ 1+s \\ 1+3s^2 \end{pmatrix}$ sono proporzionali.

I modo: cerco t, s, k t.c. $\begin{pmatrix} t-1 \\ t^2-4 \\ -t \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1-3s^2 \\ 1+s \\ 1+3s^2 \end{pmatrix}$

II modo: cerco t, s t.c. $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} t-1 & 1-3s^2 \\ t^2-4 & 1+s \\ -t & 1+3s^2 \end{pmatrix} \leq 1$

cioè tutti i sottodet 2×2 siano nulli.

In pratica: uso uno dei tre per trovare t in funz. di s o viceversa; uso un altro per trovare t o s; sostituisco.

$$(t-1)(1+3s^2)+t(1-3s^2)=0 \Rightarrow t=\frac{1+3s^2}{2}$$

$$(t-1)(1+s)-(t^2-4)(1-3s^2)=0$$

sostituisco $t=\dfrac{1+3s^2}{2}$

(conti tentativi) $\quad 27s^6+9s^4+6s^3-45s^2-2s+13=0$

$s=-1$ radice

$$(27+9-6-45+2+13=0)$$

$s=-1 \qquad t=2$

$[t-1 : t^2-4 : -t] \qquad t=2 \longrightarrow [1:0:-2]$

$[1-3s^2 : 1+s : 1+3s^2] \qquad s=-1 \longrightarrow [-2:0:4]$

$[1:0:-2]=[-2:0:4]$ è nell'intersezione.

(8) $\ell \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ retta.

Cioè ℓ è la proiezione in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ di $W \setminus \{0\}$ con $\dim W = 2$: se $W = \mathrm{Span}(w_0, w_1)$ posso definire

$$\varphi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \ell$$
$$[t_0 : t_1] \longmapsto [t_0 w_0 + t_1 w_1]$$

φ è ben def, iniettiva, surgettiva.

$\hookrightarrow$ siccome ho usato un rappresentante $[t_0 : t_1]$ devo vedere che il risultato non dipende

Se $[s_0 : s_1] = [t_0 : t_1]$ allora $\begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow s_0 w_0 + s_1 w_1 = k(t_0 w_0 + t_1 w_1)$

$\Rightarrow [s_0 w_0 + s_1 w_1] = [t_0 w_0 + t_1 w_1]$. ✓

iniettiva : analogo

surgettiva : ovvio

(3) Per quali $t \in \mathbb{R}$ $[t-4 : 1-4t : t^2+t+1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ appartiene alla retta passante per $[4 : -1 : 5]$ e $[3 : 3 : -1]$

ℓ = proiez di $W \setminus \{0\}$

$W \subset \mathbb{R}^3$, $\dim W = 2$, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

$$[t-4 : 1-4t : t^2+t+1] \in \ell \iff \begin{pmatrix} t-4 \\ 1-4t \\ t^2+t+1 \end{pmatrix} \in W$$

$$\iff \det \begin{pmatrix} t-4 & 4 & 3 \\ 1-4t & -1 & 3 \\ t^2+t+1 & 5 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff \det \begin{pmatrix} 5(t-1) & 5 & 0 \\ 3t^2-t+4 & 14 & 0 \\ t^2+t+1 & 5 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff 14(t-1) = 3t^2-t+4 \iff 3t^2-15t+18=0$$

$\Leftrightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \quad t = 3$ —

Foglio 7/5/14

① Classificare coniche degeneri $A = \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix}$

3x3 simm.

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\} \qquad \det A = 0.$$

Segni autoval Q:	$++$	$+-$	$+0$	00
Segni autoval A:	$++0$	$+-0$	$+0+$ $+0-$ $+00$	$00+$ $0+-$ 000

$x^2+y^2=0$ punto

$x^2-y^2=0$ 2 rette inc

$x^2+1=0$ $\emptyset$

$x^2-1=0$ due rette //

$x^2=0$ retta (doppia)

$0+1=0$ $\emptyset$

$y=0$ retta

$0=0$ $\mathbb{R}^2$

(2) Classificare $x_1^2+2x_1x_2+x_3^2+2x_2-2=0$ e trovare $\cap$ dei suoi punti all'∞ con $\{[3-t : 2t-5 : 2t-3] : t \in \mathbb{R}\} \subset \underbrace{\mathbb{P}^2(\mathbb{R})}_{\text{pti a } \infty \text{ di } \mathbb{R}^3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$d_2 < 0$

$d_3 < 0$

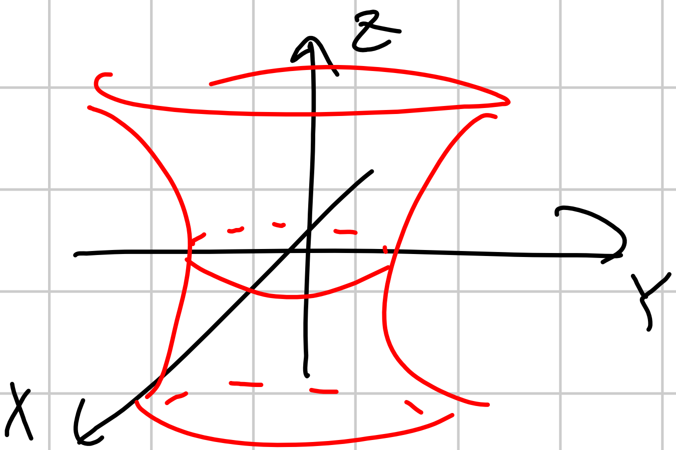
$$d_4 = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2 - 1 > 0$$

Autoval di Q/A : $(+ \; - \; -) \; +$

$$x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$$

$$y^2 + z^2 = 1 + x^2$$

$$X^2 + Y^2 = 1 + Z^2$$



iperboloide 1 falda (iperbolico)

$\mathcal{L}$: $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 + 2x_2 - 2 = 0$

$\mathcal{L}_\infty$: $x_1^2 + 2x_1x_2 + x_3^2 = 0$

$[3-t : 2t-5 : 2t-3] \in \mathcal{L}_\infty$

$$\Longleftrightarrow \quad (3-t)^2 + 2(3-t)(2t-5) + (2t-3)^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} & t^2 - 6t + 9 \\ & -4t^2 + 22t - 30 \\ & +4t^2 - 12t + 9 = 0 \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow \quad t^2+4t-12=0 \qquad t=2 \quad , \; t=-6$

3

(a) $2x^2-y^2+z^2+4xz+2yz-2x+6y-2z=0$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} x & y & z & 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$d_2 < 0$

$d_3 = -2+4-2 = 0$

$\Longrightarrow$ parab. iperb (sella)

perché $d_4 \neq 0$

$$d_4 = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = +1+21-1-3 \neq 0 \quad \underline{OK}$$

$d_2 < 0 \quad d_3 = 0 \quad \Longrightarrow Q : + \; - \; 0$

$d_4 \neq 0 \quad \Longrightarrow A : + \; - \; + \; -$

$$\begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & +1 \\ & & +1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow x^2 - y^2 + 2z = 0$$

$$Z = X^2 - Y^2$$

parab. sella

(b) $x^2+3y^2+4xy-2xz-2yz-4x-3=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$d_2 < 0$

$d_3 = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$d_4 = \dots \neq 0$

$\Longrightarrow$ parab. iperb.

(c) $2x^2+4y^2-z^2+6xy-2xz+4yz-4y+2z-1=0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$d_2 < 0$

$d_3 = -8-6-6-4+9-8 < 0$

$$d_4 = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 8 > 0$$

Antwort Q/A : $(+ - +) -$

$$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$x^2 + z^2 = 1 + y^2$$

$$X^2 + Y^2 = 1 + Z^2$$

Iperboloide a 1 falda (iperbolico)

(d) $2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4yz + 6z = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

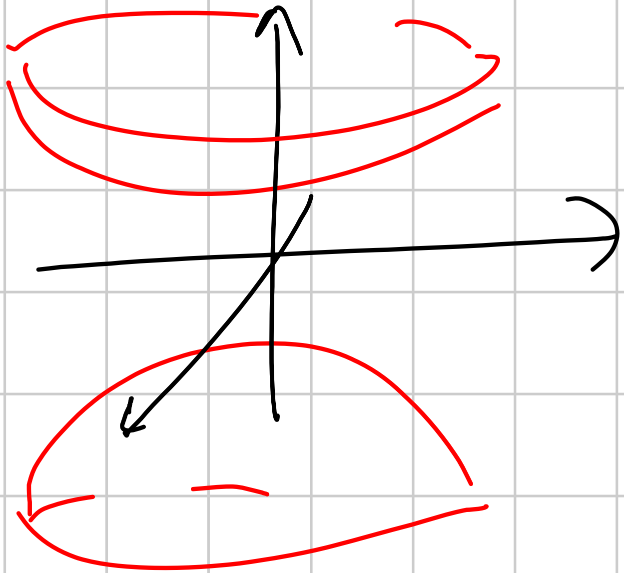
$d_1 > 0 \quad d_2 > 0$

$d_3 = 2 - 1 - 8 < 0$

$d_4 = -9 < 0$ Autoval Q/A : $+ + - +$

$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0$

$z^2 = 1 + x^2 + y^2$



iperboloide a 2 falde (ellittico) _