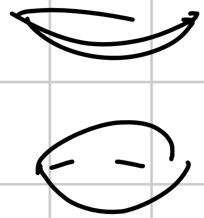
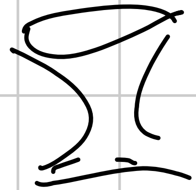
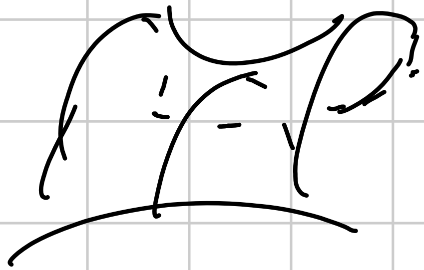
Geometria 7/5/14

"Modelli" delle quadriche affini (non degeneri):

$\emptyset \qquad x^2+y^2+z^2+1=0, \quad {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 1$

ellissoide $\quad x^2+y^2+z^2=1 \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

parab. ell. $-2z = x^2+y^2 \qquad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

iperb. ell. (2 falde)	$x^2+y^2-z^2+1=0$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$	
iperb. iperb. (1 falda)	$x^2+y^2-z^2-1=0$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$	
parab. iperb. (a sella)	$-2z=x^2-y^2$	$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$	

<u>Teo</u>(1) ogni insieme in $\mathbb{R}^3$ def. da ${}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ con ${}^tA = A$, $\det(A) \neq 0$

viene trasformato in uno dei 6 modelli elencati tramite una trasformazione affine;

(2) i segni degli autovalori di A e di Q
$\left(A = \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix}\right)$ dicono in quale dei modelli si trasforma (e diremo come).

(3) i segni di d_1, d_2, d_3, d_4 (con un piccolo accorgimento) dicono in quale si trasforma.

CONSIGLIO: Non imparare a memoria le ricette con i segni di d_1, d_2, d_3, d_4 ma ragionare sui segni degli autovalori.

<u>Dim.</u> (1) + (2). Operazioni lecite su $A = \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix}$:

(a) sostituire A con ${}^t\begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(cambio coord. affine)

(b) sostituire A con $k \cdot A$ con $k > 0$

(c) sostituire A con $k \cdot A$ con $k < 0$.

Mostrerò che tramite esse mi riconduco a uno dei modelli, e che i segni degli autoval. di A e di Q dicono a quale.

<u>Oss</u>: (a)+(b) : non cambiano i segni degli autoval di A e di Q

(c) : cambiano tutti_

Affermo che a meno di (a),(b),(c) i casi per i segni degli autoval di Q, quelli di A, e per l'insieme sono questi:

autoval Q	autoval A	insieme
+ + +	+ + + +	$\emptyset$
	+ + + −	ellissoide

+ + −	+ + − +	ip. ell. (2 falde)
	+ + − −	ip. iperb. (1 falda)
+ + 0	+ + + −	parab. ell.
+ − 0	+ − + −	parab. iperb.

(tutto nell'ipotesi $\det A \neq 0$).

I. Proviamo che a meno di (a),(b),(c) gli autoval. di Q sono solo $+++$, $++-$, $++0$, $+-0$.

L'unico caso escluso a meno di (c) è $00*$:
se fosse $00*$ avrei che $\exists B$ t.c. ${}^tB \cdot Q \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & * \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow {}^t\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & * & \vdots \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right)$$: assurdo perché $\det A \neq 0$.

II. Proviamo che date Q le possibilità per A sono solo quelle in tabella (nota: A non può mai avere 0).

Q: $+++$; diciamo A: $++++$
A: $+++-$

ovvero che A non può avere due autoval neg $- -$:

se così fosse avremmo

$$\langle v | v \rangle_A > 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},\ v \neq 0$$

$$\langle w | w \rangle_A < 0 \quad \forall w \in W,\ w \neq 0$$

$$\dim W = 2$$

poiché $3+2>0$ ho una retta di intersez

$\Rightarrow$ assurdo

Altri casi analoghi:

$$Q \ \underbrace{+ \ +}_{\text{dim 2 def pos}} \ - \quad \Rightarrow \quad A \quad \begin{matrix} + & + & - & + \\ + & + & - & - \end{matrix}$$

sto escludendo $\underbrace{++++}_{\text{ovvio}}, \underbrace{---*}_{\text{come sopra}}$ dim 3 def neg ✓

$Q: ++0 \Rightarrow A +++-$

sto escludendo $++++$, $--**$

A sarebbe def pos.
mentre se $Q\cdot v=0$, $v \in \mathbb{R}^3$
ho $\langle v|v\rangle_A = 0$

dim 2, ≥ 0

Su $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ è ≥ 0
su W, dim $W=2$ è <0
assurdo

$Q : \underbrace{\bar{+} - \bar{0}}_{\dim 2 \leq 0}$ dico che A $+ - + -$

sto escludendo $\underbrace{+++}_{\substack{\dim = 3 \\ > 0}} \cancel{+}$ $\underbrace{---}_{\substack{\dim = 3 \\ < 0}} \cancel{+}$

IV. Conoscendo i segni di autoval di Q e di A ci si riconduce a uno dei 6 modelli.

Come già visto per coniche + caso proiettivo posso usare prima B ortogonale per riconduzione a Q diagonale, poi omotetie sulle coordinate, poi cambio segno per ottenere Q diagonale con autoval $\pm 1, 0$ come prescritto dai segni!

$$Q: \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

autoval A

	$++++$	$++-+$	$+++-$	$+-+-$
	$+++-$	$++--$		

Nei primi due casi con traslazione mi riconduco a

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & 0 \\ & & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \Rightarrow \text{a meno di omotetie} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \pm 1 & \\ & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$\emptyset$, ellissoide, iperb. ell.

iper. / parab.

Negli altri due mi riconduco a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & & 0 \\ & \pm 1 & & 0 \\ & & 0 & a \\ \hline 0 & 0 & a & b \end{array}\right) \quad \text{con } a \neq 0$$

$$\Rightarrow \text{uso} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1/a & -b/a \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$${}^t\begin{pmatrix} -1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/a & -b/a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ mi sono ricondotto a

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \pm 1 & & \\ & & 0 & +1 \\ & & +1 & 0 \end{pmatrix}$$

parab. ell.

parab. iperb.

$\boxed{///}$

Parte (3):

Prop: Se $d_1, d_2, d_3 \neq 0$ i segni degli autoval. di Q sono $d_1, \frac{d_2}{d_1}, \frac{d_3}{d_2}$

di A sono $d_1, \frac{d_2}{d_1}, \frac{d_3}{d_2}, \frac{d_4}{d_3}$

$\Rightarrow$ si ottiene direttamente la classificazione.

Se $d_3 = 0$ ma $d_4 \neq 0$ (non degenere)
bisogna capire gli autovalori di Q:

$+ + 0 \, / - - 0 \rightsquigarrow$ parab. ell.

$+ - 0 \rightsquigarrow$ parab. iperb.

In pratica per capire il caso in cui ci si trova basta permutare le coordinate fino ad ottenere un caso con $d_2 \neq 0$: allora

o $d_2 < 0 \Rightarrow$ parab. iperb.

$d_2 > 0 \rightarrow$ parab. ell.

Dettaglio mancante (vedi libro) :

Si può provare che se per ogni permutazione delle coordinate si ha $d_2 = 0$ allora si ha $d_3 \neq 0$ e viene un iperb. ell/iperb. riconoscibile dai segni di $d_1 \neq 0$, d_3, d_4. $\blacksquare$

<u>Esempio:</u>

(1) $x^2 - y^2 + 2z^2 + 6xy - 2xz + 4x = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 1 > 0$

$d_2 = -10 < 0$

$d_3 = -2 + 1 - 18 < 0$

Segni autoval di Q : $+, -, +$

$d_4 = \det(A) = -2 \cdot 2 \cdot \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 8 > 0$

Segni autoval di A : $+, -, +, -$

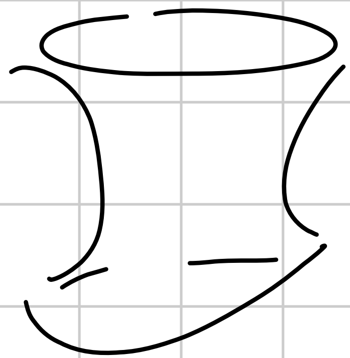
$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$x^2 - y^2 + z^2 - 1 = 0$

$x^2 + z^2 = 1 + y^2$

$(X^2 + Y^2 = 1 + Z^2)$

iperb. ell. (1 falda)



Esercizi (1° foglio 18/4 – coniche).

1. $x^2+2xy-y^2+2x-\sqrt{3}=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\sqrt{3} \end{pmatrix} \qquad d_1>0 \qquad d_2<0 \Rightarrow \text{iperbole}$$

NO

devo vedere anche $d_3 \neq 0$

$d_3 = \sqrt{3}+1+\sqrt{3} = 1+2\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow$ iperbole.

2. $2x^2-xy-3y^2-5x+10y-3=0$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1/2 & \\ -1/2 & \ddots & \end{pmatrix} \xrightarrow[\times 2]{} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -7 & -6 & 10 \\ -5 & 10 & -6 \end{pmatrix}$$

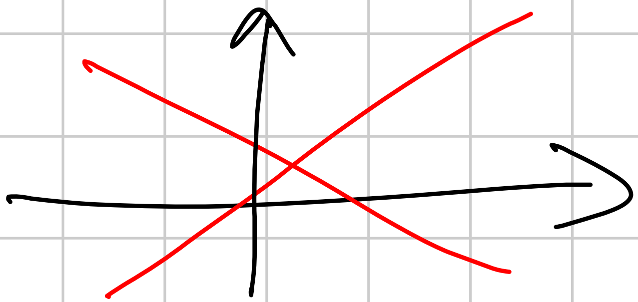
$$d_2 < 0$$

$$d_3 = \det \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 7 & -8 & 0 \\ -5 & 10 & -6 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 7 & 6 & 0 \\ -5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$= -144 - 150 + 294 = 0 \implies$$ è degenere, non un'iperbole.

$$2x^2 - xy - 3y^2 - 5x + 10y - 3 = 0$$

$$(2x - 3y + 1)(x + y - 3) = 0$$



due rette incidenti

3. $5x^2 - 4xy + 7y^2 + 4x - 3y - \sqrt{11} = 0$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ -2 & 7 & -3/2 \\ 2 & -3/2 & -\sqrt{11} \end{pmatrix} \qquad d_1 > 0 \qquad d_2 > 0$$

$d_3 > 0 \rightarrow \emptyset$

$d_3 < 0 \rightarrow$ ellisse

$$d_3 = -31\sqrt{11} + 12 - 28 - \frac{45}{4} < 0$$

$\Longrightarrow$ ellisse

4. $3x^2 - 6xy + 3y^2 + 4x - 5y - 19 = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -5/2 \\ 2 & -5/2 & -19 \end{pmatrix}$$

$d_2 = 0$ $\Longrightarrow$ parabola NO

devo vedere $d_3 \neq 0$

$$d_3 = -\cancel{9 \cdot 19} + 30 - 12 \cancel{+ 9 \cdot 19} - \frac{75}{4} \neq 0 \Longrightarrow \text{parabola}$$

8. $3x^2 - 6xy + 6y^2 - 2x - 2y - 5 = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$$

$d_1 > 0$, $d_2 > 0$

$$d_3 = \det \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -6 & 9 & 0 \\ -16 & 14 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 16 & 14 \end{pmatrix} < 0$$

ellisse

10. $4x^2 - 5xy + 6y^2 - 2x - y + 22 = 0$

$$\begin{pmatrix} 8 & -5 & -2 \\ -5 & 12 & -1 \\ -2 & -1 & 44 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 8 > 0 \quad d_2 > 0$

$$d_3 = 8 \cdot 12 \cdot 44 - 20 - 48 - 25 \cdot 44 - 8$$

$$= 44(96-25) - 76 > 0 \implies \cancel{\emptyset}$$

11. $x^2+2xy+y^2+x+y=0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$d_2=0 \qquad d_3=0$ degenere

$(x+y)^2+(x+y)=0$

$(x+y)(x+y+1)=0$

due rette parallele

18. $3x^2-5xy+2y^2-2x+6y-1=0$

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & -2 \\ -5 & 4 & 6 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

$d_2 = 24-25 < 0$

$$d_3 = \det\begin{pmatrix} 8 & -11 & 0 \\ -11 & 22 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} = -22 \det\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -11 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

iperbole

29. $17x^2 + 12xy + 8y^2 + 20x - 40y = 0$

$$\begin{pmatrix} 17 & 6 & 10 \\ 6 & 8 & -20 \\ 10 & -20 & 0 \end{pmatrix} \qquad d_1 > 0, \; d_2 > 0$$

$$d_3 = \det \begin{pmatrix} 29 & 22 & 0 \\ 6 & 8 & -20 \\ 10 & -20 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= 200 \det \cdot \begin{pmatrix} 29 & 22 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} < 0 \quad \text{ellisse}$$

32. $x^2+2xy+y^2+\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+2=0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & +\sqrt{2} \\ 2 & 2 & -\sqrt{2} \\ +\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}$$

$d_2 = 0$

$d_3 = 16-4-4-4-16-4 \neq 0$

$\Longrightarrow$ parabola.