Geometria 6/3/14

Esercizi: (1) Calcolare distanze e angoli tra le seguenti coppie di vettori di $\mathbb{R}^3$:

(a) $\underset{v}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}, \underset{w}{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}}$

$$d(v,w) = \|v-w\|_{\mathbb{R}^3} =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{R}^3} = \sqrt{4+36+16}$$

$$= \sqrt{56}$$

$$\cos(\sphericalangle(v,w)) = \frac{\langle v|w\rangle_{\mathbb{R}^3}}{\|v\|_{\mathbb{R}^3}\cdot\|w\|_{\mathbb{R}^3}} = \frac{8-5-3}{\sqrt{}\cdot\sqrt{}} = 0$$

(sono ortogonali tra loro)

(b) $\underbrace{\begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix}}_{v},\ \underbrace{\begin{pmatrix}5\\-1\\-2\end{pmatrix}}_{w}$ $\quad d(v,w) = \left\|\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$

$$\cos(\sphericalangle(v,w)) = \frac{30-4-2}{\sqrt{(36+16+1)(25+1+4)}} = \frac{24}{\sqrt{53\cdot 30}} =$$

(2) Trovare tutti i vettori di $\mathbb{R}^3$ ortogonali a

$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, aventi somma delle coordinate nulla, e norma 1.

Come non farlo: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: $\begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1 \end{cases}$.

Invece: si cerca v che soddisfa le prime due e noto che ogni $\lambda \cdot v$ continua a soddisfarle: trovo una retta su cui devo prendere i due vettori di norma 1:

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix}$ $\quad 2a-5b-a-b=0 \quad a=6b$

$$\pm \frac{1}{\sqrt{36+1+49}} \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix} .$$

Ricordo: se $A \in M_{n\times n}$ ho $\langle \cdot | \cdot \rangle_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle v | w \rangle_A = {}^t v \cdot A \cdot w .$$

- sempre bilineare
- simmetrica $\Leftrightarrow$ A simmetrica
- def. pos. ?

(3) Provare che se $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ con A simmetrica è def. pos. allora A ha coeff > 0 sulla diagonale.

Infatti $\langle e_i | e_i \rangle_A = a_{ii}$, dunque $a_{ii} > 0$ poiché $e_i \neq 0$.

(def: $\langle v | v \rangle_A > 0 \ \forall v \neq 0$).

Es: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\langle x | x \rangle_A = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdot \\ a_{12} & a_{22} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 +$$

$$+ 2 a_{12} x_1 x_2 + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{23} x_2 x_3$$

Se qualche a_{ii} non è positivo basta prendere $x_i = 1$ e $x_j = 0$ per $j \neq i$ (cioè e_i) e si trova ≤ 0.

(4) Discutere per quali $a, b, c \in \mathbb{R}$ la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ dà una $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ def. pos.

Visto: necessario che $a>0$ e $c>0$. Vogliamo:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle_A > 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ cioè}$$

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 > 0 \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \text{ cioè}$$

$a>0$, $c>0$, (divido per y e pongo $t = \frac{x}{y}$)

$$at^2 + 2bt + c > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}, \text{ cioè}$$

$a>0$, $c>0$ e $\underbrace{\Delta/4}_{= b^2 - ac} < 0$, cioè

$a>0$, $c>0$ e $ac-b^2>0$; quindi:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ è def. pos $\Longleftrightarrow$ $a>0$ e $\det(A)>0$

(ne segue anche $c>0$)

$\Longleftrightarrow$ $c>0$ e $\det(A)>0$.

(5) Per le seguenti $A \in M_{3\times3}$ simmetriche dire se $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ sia def. pos.

(a) $\begin{pmatrix} 3 & -7 & 1 \\ -7 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$:

Se considero vettori $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ trovo

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle_A = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle_{\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}} ;$$

per il criterio precedente questo non è def. pos.

$\Longrightarrow$ nemmeno $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ -

(b) $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 8 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Se prendo $\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$ trovo

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_A = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}}$$

Per il criterio 2x2 la $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ non è def. pos

$\Longrightarrow$ nemmeno A_-

(Morale: condizioni necessarie perché $A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ sia def. pos sono:

- coeff. > 0 sulla diag.
- det $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

  tutti e tre > 0.)

<u>Attenzione</u>: non sono sufficienti_

Per casa: provare con le matrici:

(c) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$

V spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con
$\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ <u>prodotto scalare</u>

cioè : bilineare, simmetrico, definito positivo.

Norma associata : $\| v \| = \sqrt{\langle v | v \rangle}$.

<u>Oss</u> : $\| v + w \|^2 = \langle v + w | v + w \rangle$

$\underset{sx}{=} \langle v | v + w \rangle + \langle w | v + w \rangle$

$\underset{dx}{=} \langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \langle w | v \rangle + \langle w | w \rangle$

$$\underset{\text{simm}}{=} \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2$$

$$\Longrightarrow \langle v|w\rangle = \frac{1}{2}\left(\|v+w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2\right)$$

dunque la norma determina il prodotto scalare.

<u>Proprietà delle norma</u>: (1) $\|v\| > 0$ per $v \neq 0$, $\|0\| = 0$

(2) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$.

$$\left(\|\lambda \cdot v\| = \sqrt{\langle \lambda v | \lambda v\rangle} = \sqrt{\lambda^2 \cdot \langle v|v\rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|\right)$$

(3) $\underbrace{\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\|}$ e l'uguaglianza vale solo

disuguaglianza triangolare — non vale (≠) se uno dei due è multiplo non neg. dell'altro —

(da dimostrare).

Prop: (disuguaglianza di Cauchy-Schwarz):

$$|\langle v|w\rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

e l'uguaglianza vale solo se uno dei due è multiplo dell'altro.

Dim: Se uno dei due è multiplo dell'altro (in part. se uno è nullo), ad es. $v = \lambda w$

$$|\langle v|w\rangle| \overset{?}{=} \|v\| \cdot \|w\|$$

$$|\langle v|w\rangle| = |\langle \lambda w|w\rangle| = |\lambda \cdot \langle w|w\rangle| = |\lambda| \cdot \|w\|^2$$

$$\|v\| \cdot \|w\| = \|\lambda \cdot w\| \cdot \|w\| = |\lambda| \cdot \|w\|^2 \quad \checkmark$$

Altrimenti si nota che $t \cdot v + w \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \|tv + w\|^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad \langle tv + w | tv + w \rangle > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \|v\|^2 \cdot t^2 + 2\langle v|w\rangle \cdot t + \|w\|^2 > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \Delta/4 < 0$ cioè

$$\langle v|w\rangle^2 - \|v\|^2 \cdot \|w\|^2 < 0$$

$\Rightarrow \quad \langle v|w\rangle^2 < \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$

$\Rightarrow \quad |\langle v|w\rangle| < \|v\| \cdot \|w\|.$ $\boxtimes$

Dimo della disuguaglianza triangolare:

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \quad \text{e uguale solo se} \ldots$$

Caso in cui uno è multiplo dell'altro: facile.

Altrimenti:

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + 2\langle v|w\rangle + \|w\|^2 \leq \|v\|^2 + 2\left|\langle v|w\rangle\right| + \|w\|^2$$

$$\underset{C-S}{<} \|v\|^2 + 2\,\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = \left(\|v\| + \|w\|\right)^2$$

$$\Longrightarrow \|v+w\| < \|v\| + \|w\|. \qquad \blacksquare$$

Def: nello spazio V reale con prod. scal. $\langle \cdot | \cdot \rangle$ e associata norma $\| \cdot \|$, chiamo distanza tra v e w la quantità

$$d(v,w) = \|v - w\|.$$

Fatto:

(1) $d(v,w) \geq 0$, ed è nulla solo per $w = v$

(2) $d(w,v) = d(v,w)$

(3) $d(v,w) \leq d(v,z) + d(z,w)$ (disug. triang.).

Infatti: (1) segue da $\|u\| > 0$ per $u \neq 0$

(2) segue da $\|-u\| = \|u\|$

(3) : $d(v,w) = \|v-w\| = \|(v-z)-(w-z)\|$

$$\leq \|v-z\| + \|w-z\| = d(v,z) + d(z,w).$$

(Sempre V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con prod. scal $\langle \cdot | \cdot \rangle$.)

Def: $v \in V$ si dice unitario se $\|v\| = 1$.

v, w si dicono ortogonali se $\langle v | w \rangle = 0$.

Prop: se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori ortogonali tra loro (a coppie) e tutti non nulli allora sono linearmente indipendenti.

Dim: Supponiamo che $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$; allora

$$\langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n / v_j \rangle = \lambda_1 \cdot \langle v_1 / v_j \rangle + \lambda_2 \langle v_2 / v_j \rangle + \dots + \lambda_n \cdot \langle v_n / v_j \rangle$$

$$\langle \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n / v_j \rangle = \langle 0 / v_j \rangle = 0$$

$$\lambda_n \cdot \langle v_n / v_j \rangle \; \shortparallel$$

$\lambda_j \cdot \|v_j\|^2$

$\Longrightarrow$ poiché $\|v_j\| \neq 0$ ho $\lambda_j = 0$

$\Longrightarrow$ $v_1, \dots, v_n$ lin. indip. $\boxtimes$

Prop. Sia $v_1, \dots, v_n$ una base ortogonale (cioè è base e i suoi vettori sono ortog. fra loro a coppie); se v è ortogonale a tutti i v_j allora è nullo.

Dim: Poiché $v_1, \dots, v_n$ è base ho $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$

e

$$\langle v \mid v_j \rangle = \lambda_1 \langle v_1 \mid v_j \rangle + \dots + \lambda_n \langle v_n \mid v_j \rangle$$

$$\| \qquad\qquad = \lambda_j \cdot \|v_j\|^2$$

$$0$$

(ipotesi)

$$\Longrightarrow \lambda_j = 0 \ \forall j \Longrightarrow v = 0. \ \boxtimes$$

Teo: Se $v_1, \dots, v_n$ è base ortogonale di V allora ogni $v \in V$ si scrive come

$$v = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v \mid v_j \rangle}{\| v_j \|^2} \cdot v_j$$

cioè la j-esima coordinata di v rispetto a $(v_1, \dots, v_n)$ vale

$$\frac{\langle v | v_j \rangle}{\|v_j\|^2}.$$

<u>Cor</u>: la j-esima coordinata di v rispetto a $(v_1, \dots, v_n)$ dipende solo da v_j, non dagli altri. Ciò è falso se la base non è ortogonale.

<u>Es</u>: $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad [v]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

anche $x' \neq x$

Invece se

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 26 \\ -11 \end{pmatrix} \right)$$

$$\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ -38 \\ 29 \end{pmatrix} \right)$$

basi ortogonali

$$\left[\begin{pmatrix}-5\\4\\6\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}-4/21\\ \vdots \\ \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix}-5\\4\\6\end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}-4/21\\ \vdots \\ \end{pmatrix}$$