Geometria 4/4/14

$\left\{ x \in \mathbb{R}^2 : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$ A simm

$\det(A) \neq 0$ (non degenere) $\Longrightarrow$ $\emptyset$, parab, iperb, ell

(d_1, d_2, d_3 dicono)

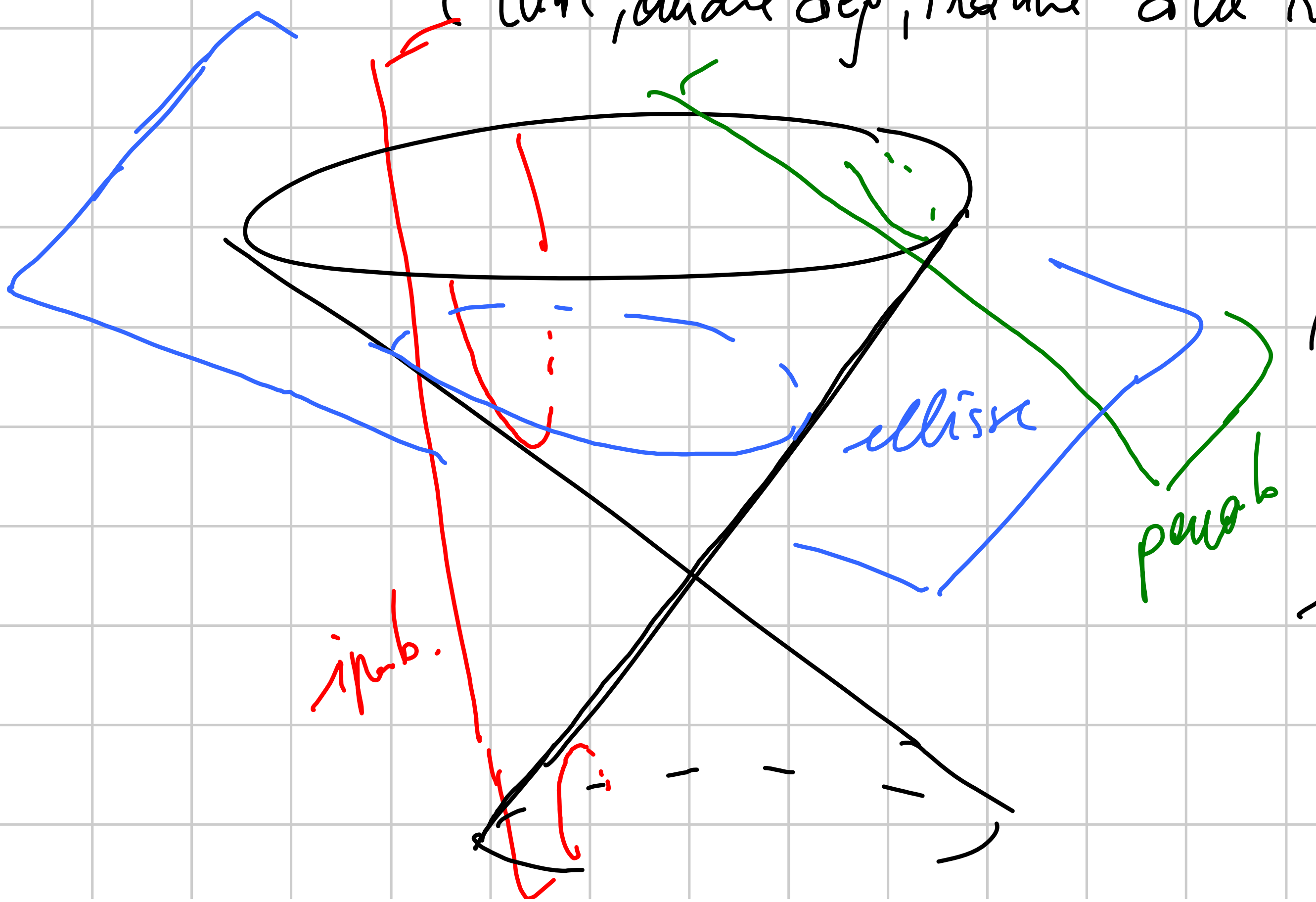
$\det(A) = 0$ (degenere):

- un punto: $x^2 + y^2 = 0$ $\quad \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

- una retta : $x^2 = 0$
- due rette parallele : $x^2 = 1$
- due rette incidenti : $xy = 0$

<u>Fatto</u>: l'elenco è completo e "giocando" con un'equazione di questo tipo si riesce sempre a capire -

"coniche" : sono sezioni di un cono
(tutte, anche deg., tranne due rette par)



$x^2+y^2=z^2$
(rotaz. intorno all'asse z di $x=z$ nel piano xz)

Spazi proiettivi (torneremo alla classificazione delle "quadriche" = analogo in $\mathbb{R}^3$ delle coniche)

Def: Sia S un insieme. Chiamiamo **relazione** su S un sottoinsieme $R \subset S \times S$ (cioè la scelta di alcune coppie ordinate di elementi di S). Scriviamo xRy invece che $(x,y) \in R$.

Es $S = \{\text{gli abitanti di Pisa}\}$

R = essere figlio di

(Matteo, Emiliano) $\in$ "essere figlio di"

Matteo è figlio di Emiliano

Def.: una relazione R su S è

- riflessiva se $xRx \quad \forall x \in S$
- simmetrica se $xRy \Longrightarrow yRx$
- transitiva se xRy e $yRz \Longrightarrow xRz$

- di equivalenza se è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Es: sono relazioni di equivalenza
su S = noi oggi qui in FDS

- Avere la stessa iniziale del cognome
- Essere nati lo stesso giorno

Invece: avere studiato insieme ieri è
rifl. e simm. ma non transitiva

$\underline{\text{Es}}$: $S = \mathbb{R}$ $\quad R$: xRy se $y - x \in \mathbb{Z}$

è di equivalenza:

- xRx ? $\quad x - x \in \mathbb{Z}$? $\quad \checkmark$
- $xRy \overset{?}{\Longrightarrow} yRx$; $\quad y - x \in \mathbb{Z} \overset{?}{\Longrightarrow} x - y \in \mathbb{Z}$ $\quad \checkmark$
- $xRy, yRz \overset{?}{\Longrightarrow} xRz$;

$$y - x \in \mathbb{Z},\ z - y \in \mathbb{Z} \overset{?}{\Longrightarrow} \underset{\substack{\parallel \\ (z-y)+(y-x)}}{z - x} \in \mathbb{Z} \quad \checkmark$$

Def: una relaz. R su S è

- **antisimmetrica** se xRy e $yRx \Rightarrow y = x$
- **di ordine** (parziale) se è

    rifl, antisimm, transitiva

Es (1) $S = \mathbb{R}$, relaz $\leq$

- $x \leq x$ ✓
- $x \leq y$ e $y \leq x \overset{?}{\Longrightarrow} y = x$ ✓
- $x \leq y$ e $y \leq z \overset{?}{\Longrightarrow} x \leq z$ ✓

Inoltre è un ordine totale:

dati $x, y \in \mathbb{R}$ è sempre vera o

$x \leq y$ o $y \leq x$.

(2) $S =$ { sottoinsiemi finiti di $\mathbb{Z}$ }, relaz $\subseteq$

- $A \subseteq A$ ✓
- $A \subseteq B$, $B \subseteq A \implies B = A$ ✓
- $A \subseteq B$, $B \subseteq C \implies A \subseteq C$ ✓

Non è totale:

$A = \{-1, 3, 7\}$, $B = \{-5, -1, 3, 19\}$.

D'ora in poi S è un insieme e $\sim$
è una relazione di equivalenza su S
(si usano per rel. equiv. $\sim, \simeq, \cong, \equiv, \dots$)

Es: S = noi qui oggi, $\sim$ = stessa iniziale

Petronio $\sim$ Pellegrini Petronio $\not\sim$ Alex.

Def: chiamo classe di equivalenza di $x \in S$
l'insieme $[x] = \{ y \in S : y \sim x \}$.

Prop: le classi di equivalenza sono una partizione di S, cioè:

•) la loro unione è tutto S

••) due di loro distinte sono disgiunte.

Dim: •) $x \in [x]$ dato che $x \sim x$ (rifl)

••) Se $y \in [x] \cap [z]$ abbiamo $y \sim x$ e $y \sim z$ ma per simm e trans abbiamo che $x \sim z$ e dunque

$w \in [x] \Rightarrow w \sim x$ e $x \sim z \Rightarrow w \sim z \Rightarrow w \in [z]$

dunque $[x] \subseteq [z]$. Inoltre $z \sim x$

e analogamente vedo che $[z] \subseteq [x]$

$\Rightarrow [z] = [x]$. $\boxed{\checkmark}$

Def: chiamo quoziente di S rispetto a $\sim$ l'insieme $S/_{\sim}$ delle classi di equivalenza.

Cioè: in $S/_{\sim}$ tutti gli elementi di S equivalenti tra loro diventano un solo elemento.

Cioè: passare da S al quoziente $S/\sim$ significa identificare tra loro tutti gli elementi di S equivalenti fra loro.

Def: chiamo proiezione la mappa

$$\pi : S \longrightarrow S/\sim$$
$$x \longmapsto [x].$$

Es: S = noi, $\sim$ = stessa iniziale

S(Petronio) = {Petronio, Pellegrini, ...}

\ un sottoins. di S;
un punto di $S/_\sim$

Come descrivere un quoziente?

- Scegliere un "insieme di rappresentanti"
  = uno e un solo elemento in ogni classe di equivalenza
- Scegliere un "nome" per ogni classe

di equivalenza (nome diverso per classi diverse).

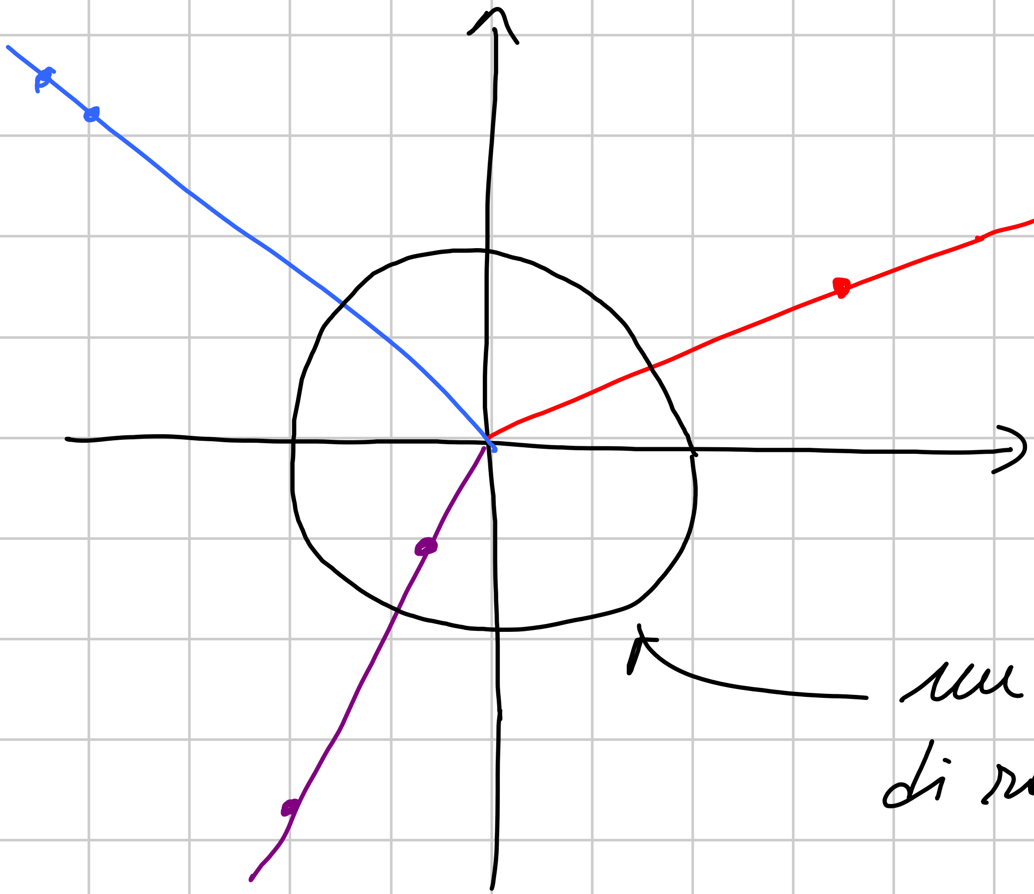
Es: S = noi, $\sim$ = stessa iniziale

rappresentanti: per ogni classe di equiv. prendiamo il suo elemento più alto

nomi: la lettera iniziale comune

Es: $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$x \sim y$ se x e y sono sulle stesse semiretta uscente da O



$$\Rightarrow \left(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\right)/\sim$$

si identifica in modo naturale con la circonf. unitaria

un insieme di rappresentanti