UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 28/6/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Se $Y = \{y \in \mathbb{R}^4 : \ 7y_1 + 4y_2 + 5y_3 - 2y_4 = 0\}$ e $h \ : Y \to Y$ è lineare e ha i soli autovalori 6 e -1, si può concludere che h è diagonalizzabile oppure che non lo è?

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitarî, ortogonali a $\begin{pmatrix} -1-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ e aventi somma delle coordinate reale.

3. Per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[5-2t : t-4 : 1-t]$ coincide con $[3 : -1 : 2]$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la conica affine $2x^2 + 2(2-t)xy + (t+2)y^2 + 2\sqrt{5}y + 2 = 0$ è un ellisse.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $4x^2 + 2y^2 + z^2 - 4xy + 2yz - 2y = 0$.

6. Calcolare la matrice hessiana nel punto $(0,0)$ della funzione $f(x,y) = (1 + 3xy + 4y^2)\cos(x+2y)$, e i segni degli autovalori di tale matrice.

7. Calcolare $\int_\alpha (xy\,\mathrm{d}x - 2y^2\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha : \ [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2-t^2 \\ 1-3t \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 28/6/14 — Esercizî

1. Considerare $A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = A + {}^{\mathrm{t}}\!A, \quad C = A - {}^{\mathrm{t}}\!A.$

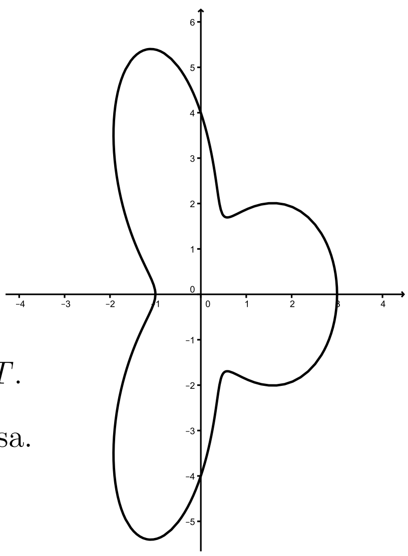
(A) (3 punti) Trovare gli autovalori di A e una base di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.

(B) (1 punto) Provare che esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ costituita da autovettori di B.

(C) (3 punti) Trovare il polinomio caratteristico di B e i segni dei suoi autovalori.

(D) (3 punti) Trovare $a \in \mathbb{R}$ tale che C sia coniugata tramite una matrice ortogonale a $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(E) (2 punti) Trovare tutti gli autovettori (reali) di C.



2. Considerare la curva $\gamma(s) = (\cos(3s) - 2)\begin{pmatrix} \cos(s) \\ 2\sin(s) \end{pmatrix}$,
la cui immagine è mostrata in figura.

(A) (2 punti) Provare che γ è periodica e trovarne il minimo periodo T.

(B) (1 punto) Provare che la restrizione di γ a $[0, T]$ è semplice e chiusa.

(C) (3 punti) Calcolare la curvatura di γ in $s = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\alpha \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$ dove α è la restrizione di γ a $[0, T]$.

(E) (2 punti) Calcolare $\int_\beta x\,\mathrm{d}x$ dove β è la restrizione di γ a $[0, \pi]$.

(F) (1 punto) Provare che γ è regolare.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♡

1. Nessuna delle due: in una base opportuna la h può avere matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$, dunque essere diagonalizzabile oppure non esserlo

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{91}}\begin{pmatrix} 8-i \\ 5+i \end{pmatrix}$

3. $t = 7$

4. $0 < t < 1$ e $5 < t < 6$

5. Paraboloide ellittico

6. $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; uno positivo e uno negativo

7. $\frac{73}{10}$

Soluzioni

1.

(A) $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_2 = 4, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 41 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(B) B è simmetrica

(C) $t^3 - 6t^2 - 129t + 164$; due positivi e uno negativo

(D) $a = \pm\sqrt{89}$

(E) $t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ con $t \neq 0$

2.

(A) $T = 2\pi$ perché $\gamma(t)$ appartiene sempre alla semiretta uscente dall'origine e passante per $-\begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \end{pmatrix}$, dunque $\alpha(t+k)$ può essere $\alpha(t)$ solo per k multiplo intero di 2π; inoltre anche il coefficiente $\cos(3t) - 2$ ha 2π tra i suoi periodi

(B) Entrambi i fatti seguono dalle considerazioni precedenti

(C) -2

(D) 2π

(E) 4

(E) La prima componente della derivata di γ si annulla per $\sin(t) = 0$ e per $8\cos^3(t) - 3\cos(t) - 1 = 0$, mentre la seconda si annulla per $16\cos^4(t) - 18\cos^2(t) - 2\cos(t) + 3 = 0$, e queste equazioni non hanno soluzioni comuni